Лужские группы Северо-Западной Заочной математической школы при СПбГУ
МОУ «Средняя школа № 3» г. Луги

ВТОРАЯ ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

5–8 классы

задачи и решения

г. Луга, 2007 г.

Вторая открытая олимпиада МОУ «Средняя школа № 3» г. Луги и Лужских групп Заочной математической школы при СПбГУ, 5–8 классы, 2007 г.

Сборник содержит условия задач олимпиады и их решения.

Результаты олимпиады будут опубликованы на странице `http://math.luga.ru/inf/compet/oolimp/2/`

Наш сайт в интернете: `http://math.luga.ru`

Оригинал-макет подготовлен в пакете LaTeX 2_ε с использованием семейства шрифтов Computer Modern с кириллическим расширением LH. Иллюстрации подготовлены в пакете `metapost`.

Информация об олимпиаде

Третий (областной) этап Всероссийской математической олимпиады школьников в Ленинградской области проводится только для 9–11 классов (хотя центральная методическая комиссия присылает в областной оргкомитет задания, в том числе, и для 8-классников).

Во многих городах области и районная олимпиада проводится только для старших школьников. Но олимпиадную работу среди способных детей необходимо начинать раньше. Возможность общения и соревнования со своими сверстниками из других городов — полезный и необходимый этап этой работы.

В Луге письменные личные олимпиады по математике для учеников 5–8 классов проводились давно, но в последние два года уровень их организации и проведения перестал быть удовлетворительным. Это подтолкнуло инициативную группу лужан к организации альтернативной олимпиады для школьников 5–8 классов. Организаторами олимпиады выступили МОУ «Средняя школа № 3» г. Луги и Лужские группы Заочной математической школы при СПбГУ.

В 2006 году была проведена Первая открытая олимпиада для учеников 5–8 классов не только Лужского района, но всей Ленинградской области. Мероприятие прошло успешно: в олимпиаде приняли участитие 133 школьника из Волхова, Гатчины, Гатчинского р-на, Кингисеппа, Луги, Сиверского, Соснового Бора.

Судя по отзывам приезжавших учителей, олимпиада им понравилась. Появилось желание сделать мероприятие, во-первых, регулярным, во-вторых, охватывающим большее число районов. Для осуществления этого необходимо проводить олимпиаду не в один день, а в три:

1) день заезда (заезд, размещение, знакомство, общение, культурная программа);

2) день олимпиады (письменный тур, разбор задач, показ работ, устная командная олимпиада или брейн-ринг, награждение);

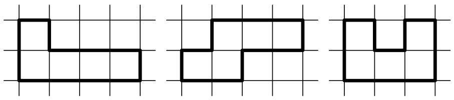
3) день отъезда.

К сожалению, пока эти планы осуществить не удаётся, и в 2007 году олимпиада проводится снова в один день. Возможно, кто-то поможет нам в организации олимпиады, план которой приведён выше.

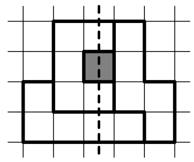
Ждём Ваших предложений! Тел. (81372) 266-10, e-mail: `psp@luga.ru`

5 класс

• **1.** Из трёх данных фигурок (см. рис. справа) сложите фигуру, имеющую ось симметрии (каждую фигурку необходимо использовать ровно один раз, фигурки можно прикладывать друг к другу без наложений). Для решения достаточно сложить одну фигуру и изобразить её ось симметрии.



Решение: Например, так, как изображено на рисунке.

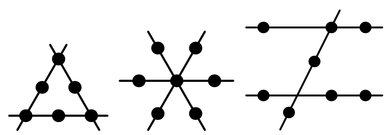


• **2.** В ребусе $Я+О\times Н+Д\times Р\times У\times З\times Ь\times Я = М\times Ы$ одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, а разные — разными. Найдите какое-нибудь решение ребуса, постаравшись при этом, чтобы значение суммы $Я+О+Н$ было как можно больше.

Решение: $8+3\times 9+0\times 1\times 2\times 4\times 6\times 8 = 5\times 7$, $Я+О+Н = 20$.

• **3.** Лена на каждом из трёх рисунков изобразила три прямые (различные) и отметила на прямых несколько точек так, что на каждом рисунке оказалось по три отмеченных точки на каждой нарисованной прямой. Она дала по одному рисунку Антону, Боре и Ване. Антон насчитал 6 точек, Боря — 7, Ваня — 8. Можно ли утверждать, что кто-то из мальчиков ошибся?

Решение: Нельзя. На рисунках приведены примеры, когда общее число точек равно 6, 7, 8.



• **4.** Можно ли из 20 чисел 1, 2, 3, …, 20 выбрать 8 чисел так, чтобы никакое из выбранных чисел не делилось ни на какое другое выбранное число?

Решение: Можно. Например: 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15.

• **5.** Как известно, у каждого шуршавчика есть шуршалка, пищалка и трещалка. В результате борьбы с привидениями из 100 шуршавчиков ровно 95 оказались без шуршалок, ровно 94 — без пищалок, ровно 90 — без трещалок. Шуршавчик, лишённый всего — и шуршалки, и пищалки, и трещалки, сильно нервничает, а потом вымирает. Какое наибольшее число шуршавчиков в состоянии выжить в сложившейся ситуации?

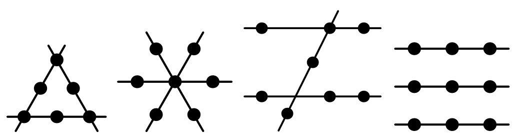
Решение: Наибольшее число 21. Поскольку с шуршалками остались 5, с пищалками — 6, с трещалками — 10, то выжить смогут не более $5+6+10=21$ шуршавчика. Если эти группы (в 5, 6 и 10 шуршавчиков) не имеют общих членов, то всего в них 21 шуршавчик.

6 класс

• **1.** См. задачу № 1 для 5 класса.

• **2.** У электромонтёра дяди Васи был провод длиной 25 м, из которого он собирался вырезать куски провода в 1 м, 2 м, 3 м, 6 м, 12 м. Но хулиган Петя взял и разрезал провод на две части. Может ли случиться так, что теперь монтёр дядя Вася не сможет отрезать необходимые куски провода?
Решение: Не может. Хотя бы одна из двух частей, на которые Петя разрезал провод, длиннее 12 м, поэтому от неё дядя Вася может отрезать кусок длиной 12 м. После этого сумма длин двух оставшихся кусков равна $25 - 12 = 13$ м, поэтому хотя бы один из них длиннее 6 м. От него монтёр и отрежет кусок в 6 м. Суммарная длина двух оставшихся кусков $13 - 6 = 7$ м, значит, среди них есть кусок длиной не менее 3 м — от него дядя Вася отрежет 3-метровый провод. После этого сумма длин двух оставшихся кусков составит $7 - 3 = 4$ м, значит, хотя бы один из них не менее 2 м. От него монтёр отрезает провод длиной 2 м, после чего остаются два куска, общая длина которых $4 - 2 = 2$ м. Один из этих кусков не менее 1 м, от него дядя Вася и может отрезать метровый провод.

• **3.** Лена на каждом из пяти рисунков изобразила три прямые (различные) и отметила на прямых несколько точек так, что на каждом рисунке оказалось по три отмеченных точки на каждой нарисованной прямой. Она дала по одному рисунку Антону, Боре, Ване, Гене и Диме. Антон насчитал 6 точек, Боря — 7, Ваня — 8, Гена — 9, Дима — 10. Можно ли утверждать, что хотя бы двое мальчиков ошиблись?
Решение: Нельзя. На рис. приведены примеры, когда общее число точек равно 6, 7, 8, 9. Следовательно, Антон, Боря, Ваня, Гена могли и не ошибиться, т. е. возможна ситуация, когда 4 мальчика из 5 не ошиблись.

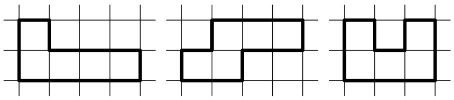


• **4.** Можно ли из 20 чисел 1, 2, 3, ..., 20 выбрать 9 чисел так, чтобы никакое из выбранных чисел не делилось ни на какое другое выбранное число?
Решение: Можно. Например: 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17.

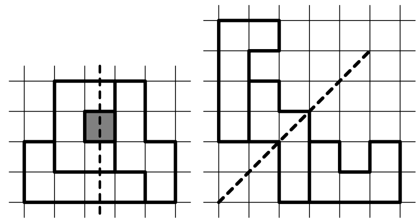
• **5.** Волк с тремя поросятами написал детектив «Три поросёнка-2», а потом вместе с Красной Шапочкой и её бабушкой — кулинарную книгу «Красная Шапочка-2». В издательстве за обе книжки выдали гонорар Нуф-Нуфу. Он забрал свою долю, а оставшиеся 2007000 руб. отдал волку. Сколько денег Волк должен взять себе, если гонорар за каждую книгу делится поровну между её авторами?
Решение: 669000 руб. Поскольку оставшиеся деньги надо разделить между тремя авторами первой книги и тремя авторами второй книги, а одним из авторов и там, и там является волк, то ему причитается третья часть оставшихся денег, т. е. 669000 руб.

7 класс

• **1.** Из трёх данных фигурок (см. рис. справа) сложите фигуру, имеющую ось симметрии (каждую фигурку необходимо использовать ровно один раз, фигурки можно прикладывать друг к другу без наложений). Постарайтесь найти хотя бы два решения задачи. Изобразите на каждом из Ваших рисунков ось симметрии.



Решение: Например, так, как изображено на рисунках.



• **2.** См. задачу № 2 для 6 класса.

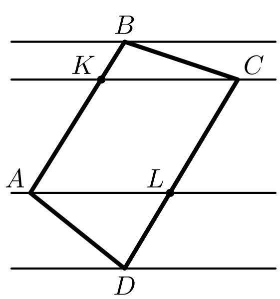
• **3.** У Миши есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Миша садился в поезд, аккумулятор был полностью заряжен, а полностью разрядился он как раз в момент прибытия поезда. Во сколько поезд прибыл, если отправился он в 10 ч. утра, а Миша разговаривал по телефону ровно половину времени поездки?

Решение: В 21 ч. 40 мин. Пусть время поездки равно $2t$ часов. Тогда Миша разговаривал по телефону t часов. После этого энергии аккумулятора осталось на $6-t$ часов разговора или на $35(6-t)$ часов ожидания (т. к. в режиме ожидания аккумулятор разряжается в 35 раз медленнее, чем при разговоре). По условию $35(6-t)=t$, откуда $t=5\frac{5}{6}$. Значит, $2t=11\frac{2}{3}$.

• **4.** Можно ли из 20 чисел 1, 2, 3, …, 20 выбрать 10 чисел так, чтобы никакое из выбранных чисел не делилось ни на какое другое выбранное число?

Решение: Можно. Например: 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 19.

• **5.** По соседним линиям клетчатой бумаги проведены 7 параллельных прямых. Можно ли на 1-ой, 2-ой, 5-ой и 7-ой из них отметить по точке так, чтобы они были вершинами параллелограмма?



Решение: Нельзя. Докажем это методом от противного. Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм (см. рис. справа, на котором из 7 данных параллельных прямых изображены только 1-ая, 2-ая, 5-ая и 7-ая). Тогда четырёхугольник $AKCL$ — тоже параллелограмм. Следовательно, $\triangle ADL = \triangle CBK$ (по стороне и двум углам). Но длины высот (из вершин D и B) этих треугольников, очевидно, равны 2 и 1 соответственно. Полученное противоречие завершает доказательство.

8 класс

- **1.** См. задачу № 1 для 7 класса.
- **2.** См. задачу № 2 для 6 класса.
- **3.** Целые числа a, b, c, d удовлетворяют соотношению $\dfrac{a-b}{c-d} = \dfrac{a+b}{c+d}$. Может ли оказаться, что $abcd = 1000$?

Решение: Не может. Докажем это методом от противного. Пусть данное соотношение выполняется. Тогда нетрудно получить, что $bc = ad$. Следовательно, $abcd$ — точный квадрат. Но 1000 не является точным квадратом. Полученное противоречие завершает доказательство.

- **4.** Даны 20 чисел: 1, 2, 3, ..., 20. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из них так, чтобы никакое из выбранных чисел не делилось ни на какое другое выбранное число?

Решение: 10 чисел. Разобьём данные числа на 10 групп: 1) 1, 2, 4, 8, 16; 2) 3, 6, 12; 3) 5, 10, 20; 4) 7, 14; 5) 9, 18; 6) 11; 7) 13; 8) 15; 9) 17; 10) 19. В каждой группе в любой паре чисел одно делится на другое. Значит, из каждой группы мы не можем выбрать более 1 числа. Итак, можно выбрать не более 10 чисел. Пример выбора 10 чисел: 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 19.

- **5.** См. задачу № 5 для 7 класса.