Лужские группы Северо-Западной Заочной математической школы при СПбГУ
МОУ «Средняя школа № 3» г. Луги

ТРЕТЬЯ ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

5–8 классы

задачи и решения

г. Луга, 2008 г.

Третья Открытая олимпиада Лужских групп Заочной математической школы при СПбГУ и МОУ «Средняя школа № 3» г. Луги, 5–8 классы, 2008 г.

Результаты олимпиады будут опубликованы на странице http://math.luga.ru/inf/compet/oolimp/3/

Информация об олимпиаде

Третий (областной) этап Всероссийской математической олимпиады школьников в Ленинградской области проводится только для 9–11 классов (хотя центральная методическая комиссия присылает в областной оргкомитет задания, в том числе, и для 8-классников). Объективных причин этого нет. Дело в отсутствии желания областного оргкомитета делать эту важную работу.

Во многих городах области и районная олимпиада проводится только для старших школьников. Но олимпиадную работу среди способных детей необходимо начинать раньше. Возможность общения и соревнования со своими сверстниками из других городов — полезный и необходимый этап этой работы.

В Луге письменная личная олимпиада по математике для учеников 5–8 классов проводилась давно, имела славные традиции, но в последние два года уровень её организации и проведения стал таким низким, что её следует называть не олимпиадой, а лишь пародией на неё. Это подтолкнуло инициативную группу лужан к организации альтернативной олимпиады для школьников 5–8 классов.

Организаторами выступили учитель математики МОУ «Средняя школа № 3» г. Луги Л. Н. Рысева и руководитель Лужских групп Заочной математической школы при СПбГУ С. П. Павлов (при большой поддержке бывших и нынешних учеников ЗМШ).

В 2006 году была проведена Первая Открытая олимпиада для учеников 5–8 классов не только Лужского района, но всей Ленинградской области, в 2007 году — Вторая. Мероприятия прошли успешно: в каждой из олимпиад приняли участие около 150 школьников Волхова, Гатчины, Гатчинского р-на, Кингисеппа, Луги, Сиверского, Соснового Бора.

Судя по отзывам детей и учителей, олимпиада им понравилась. Мероприятие стало регулярным.

Контактный тел. (81372) 266-10, e-mail: psp@luga.ru.

Наш сайт в интернете: http://math.luga.ru

Оригинал-макет подготовлен в пакете LaTeX 2ε с использованием шрифтов Computer Modern с кириллическим расширением LH. Иллюстрации подготовлены в пакете metapost.

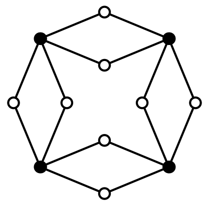
5 класс

• **5.1.** Невнимательный и торопливый таракан Кузя объявил собратьям по тараканьим бегам, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Ему не поверили, и правильно: на самом деле Кузя всё перепутал и думал, что в метре 60 сантиметров, а в минуте 100 секунд. С какой скоростью (м/мин) на самом деле бегает таракан Кузя?

Решение: Решение. Кузя пробегает 50 своих «метров», т. е. настоящих $50 \cdot 60 = 3000$ см за свою 1 «минуту», т. е. за настоящие 100 секунд. Значит, его скорость $3000 : 100 = 30$ см/с $= 1800$ см/мин $= 18$ м/мин.

• **5.2.** Дед звал внучку Машу к себе в деревню: «Посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут четыре груши, а ещё есть яблони, и посажены они так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». — «Ну и что тут интересного, — ответила внучка-отличница. — У тебя всего две яблони». «А вот и не угадала, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня больше, чем груш». Нарисуйте, как могли быть посажены у деда яблони и груши. Постарайтесь разместить на вашей схеме как можно больше яблонь.

Решение: Например, схема сада может выглядеть так, как показано на рисунке (белыми кружками показаны яблони, чёрными — груши; все проведённые отрезки по 10 м).



• **5.3.** Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на 3 кучки; кому какая достанется — определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт из большей кучки весь излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты. Сможет ли лиса разложить конфеты так, что ей самой удастся съесть ровно 70 конфет, независимо от жребия?

Решение: Сможет. Для этого она может разложить конфеты так: 15, 15 и 70 (и только так). Если медвежатам достанется поровну конфет, то они не будут жаловаться, и лиса съест 70 конфет. Если же ей достанется кучка из 15 конфет, то, для того чтобы уравнять доли медвежат, она заберёт излишек — 55 конфет, что вместе с её кучкой составит 70 конфет. В любом случае лиса съест ровно 70 конфет.

• **5.4.** Год проведения нынешней Открытой олимпиады не делится на её номер: 2008 не делится на 3. Найдите все номера Открытых олимпиад (прошедших и будущих), для которых год их проведения делится на их номер.

Решение: Каждый год и номер олимпиады, и номер года увеличивается на 1, значит, разность между этими номерами не меняется. В 2008 году она равна $2008 - 3 = 2005$, следовательно, такой была и будет всегда. Обозначим номер года через y, а номер олимпиады через n. По условию $y - n \,\vdots\, n$. Но $y - n = 2005$, т. е. $2005 \,\vdots\, n$. Значит, n — это делитель 2005. Но $2005 = 5 \times 401$, причём 5 и 401 —

простые числа. Значит, натуральными делителями 2005 являются только числа 1, 5, 401, 2005 — это и есть искомые номера олимпиад.

• **5.5.** Забывчивая Таня стоит на берегу речки. У неё есть два глиняных кувшина: один — на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Как Тане определить ёмкость второго кувшина? (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды.)
Решение: Таня наливает воду из полного малого кувшина в большой, затем наполняет малый и из него доливает большой доверху. Далее Таня опорожняет большой кувшин, после чего выливает в него остаток воды из малого. Если малый кувшин 3-литровый, то сейчас в большом 1 литр воды, а если 4-литровым — 3 литра. Теперь Таня снова начинает переливать воду из полного малого кувшина в большой. Если это ей удастся, то малый кувшин был 3-литровым, если вода польётся через край, — 4-литровым.

6 класс

• **6.1.** Год проведения нынешней Открытой олимпиады не делится на её номер: 2008 не делится на 3. Найдите все номера Открытых олимпиад (прошедших и будущих), для которых год их проведения делится на их номер.
Решение: Каждый год и номер олимпиады, и номер года увеличивается на 1, значит, разность между этими номерами не меняется. В 2008 году она равна $2008 - 3 = 2005$, следовательно, такой была и будет всегда. Обозначим номер года через y, а номер олимпиады через n. По условию $y - n \,\vdots\, n$. Но $y - n = 2005$, т. е. $2005 \,\vdots\, n$. Значит, n — это делитель 2005. Но $2005 = 5 \times 401$, причём 5 и 401 — простые числа. Значит, натуральными делителями 2005 являются только числа 1, 5, 401, 2005 — это и есть искомые номера олимпиад.

• **6.2.** См. задачу № 2 для 5 класса.

• **6.3.** В прямоугольнике 5×6 Серёжа выбрал одну из клеток, соседних с угловой, и закрасил её. Саша может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все оставшиеся клетки прямоугольника?
Решение: Сможет. Сначала закрасим строку длиной 5 клеток, содержащую изначально закрашенную клетку. Далее будем красить 1-ый, 3-ий, 5-ый столбцы, начиная закраску от покрашенной клетки. После этого закрасить оставшиеся клетки доски совсем просто.

• **6.4.** На поле 3×3 расставили чётное ненулевое количество ладей так, что нет клетки, которая бьётся ровно одной ладьёй. Сколько ладей могло быть расставлено?
Решение: 4, 6 или 8 (см. рис.). Докажем, что не может быть и 2 ладей. Если бы они оказались в одной строке (столбце), то каждая клетка столбцов (строк),

в которых они стоят, билась бы ровно одной ладьёй. Значит, поставленные ладьи оказались в разных строках и столбцах. Но тогда есть строка, в которой не стоит ни одной ладьи. В этой строке есть две клетки, каждая из которых бьётся ровно одной из поставленных ладей. Значит, две ладьи требуемым образом не поставить.

• **6.5.** Можно ли расставить по окружности числа от 1 до 9 так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

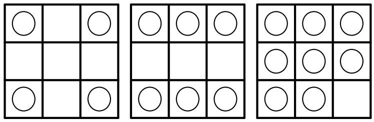


Рис. к решению задачи 6.4

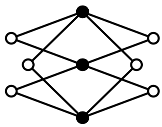
Решение: Нельзя. Нечётное число не может делиться на чётное, поэтому нечётное число не может стоять в окружении чисел одинаковой чётности. Отсюда следует, что нечётные числа стоят парами. Однако среди чисел 1, 2, ..., 9 нечётных чисел пять, и поэтому их нельзя разбить на пары.

7 класс

• **7.1.** См. задачу № 1 для 6 класса.

• **7.2.** Дед звал внучку Алёну к себе в деревню: «Посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут груши и яблони, а посажены они так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». — «Ну и что тут такого, — ответила внучка-отличница. — У тебя, значит, яблонь вдвое меньше, чем груш». «А вот и не угадала, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня вдвое больше, чем груш». А могло ли так быть?

Решение: Могло. Например, при схеме, изображённой на рисунке (белыми кружками показаны яблони, чёрными — груши; все проведённые отрезки по 10 м).

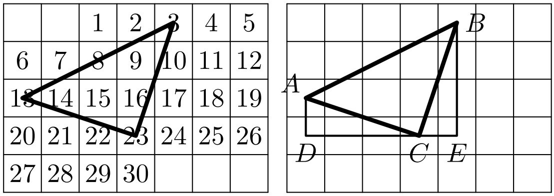


• **7.3.** Юля выбрала одну из клеток прямоугольника 6×5 и закрасила её. Полина может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Полина закрасить все оставшиеся клетки прямоугольника, независимо от того, какую клетку выбрала Юля?

Решение: Сможет. Сначала закрасим строку длиной 5 клеток, содержащую изначально закрашенную клетку. Далее будем красить 1-ый, 3-ий, 5-ый столбцы, начиная закраску от покрашенной клетки. После этого закрасить оставшиеся клетки доски совсем просто.

• **7.4.** Терпеливо дожидаясь Третьей Открытой олимпиады, Таня сделала из листа клетчатой бумаги календарь на апрель 2008 года (см. рис.) и заметила, что центры клеток 3, 13 и 23 образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Таня предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда эти центры лежат на одной прямой. Права ли Таня?

Решение: Таня права. Так как в неделе 7 дней, то всего существует 7 различных вариантов расположения дат в апрельском календаре. При этом существует всего 2 принципиально различных варианта расположения треугольника 3–13–23 (один из них приведен в условии задачи, другой — на нашем рисунке), все остальные получаются из них горизонтальными сдвигами треугольника.



Проверим Танино предположение для расположения, изображённого на нашем рисунке (для другого случая рассуждения будут аналогичными). Рассмотрим треугольники ADC и BCE (см. рис.): у них попарно равны стороны ($AD = CE$, $DC = BE$) и углы между ними ($\angle ADC = \angle BEC = 90°$). Значит, $\triangle ADC = \triangle CEB$. Из этого следует, что $AC = BC$. Далее: $\angle ACD + \angle BCE = \angle ACD + \angle CAD = 90°$. Обратим внимание на развёрнутый угол с вершиной C. Он состоит из угла ACB и двух углов ($\angle ACD$ и $\angle BCE$), сумму которых мы знаем. Значит, $\angle ACB = 180° - 90° = 90°$. Следовательно, $\triangle ABC$ является равнобедренным прямоугольным.

• **7.5.** Можно ли расставить по окружности числа от 1 до 13 так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

Решение: Нельзя. Нечётное число не может делиться на чётное, поэтому нечётное число не может стоять в окружении чисел одинаковой чётности. Отсюда следует, что нечётные числа стоят парами. Однако среди чисел $1, 2, \ldots, 13$ нечётных чисел семь, и поэтому их нельзя разбить на пары.

8 класс

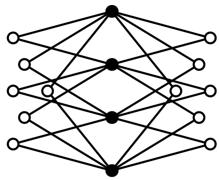
• **8.1.** Положительные x и y таковы, что $\dfrac{1+y}{x-y} = x$. Докажите, что x и y отличаются друг от друга на 1.

Решение: Так как $1 + y$ отлично от нуля, то данное в условии равенство равносильно такому: $1+y = x^2-xy$, или $1+y-x^2+xy = 0$, откуда $(1+x)(1-x+y) = 0$. Так как $1 + x \neq 0$, то $x = y + 1$. А из этого следует, что x и y отличаются друг от друга на 1.

• **8.2.** Дед звал внука Мишу к себе в деревню: «Посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут груши и яблони, а посажены они так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растут ровно две груши». — «Ну и что такого, — ответил внук-отличник. — У тебя, значит, яблонь вдвое меньше, чем груш». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня втрое больше, чем груш». Могло ли так быть?

Решение: Могло. Например, при схеме, показанной на рисунке (белыми кружками показаны яблони, чёрными — груши; все проведённые отрезки по 10 м).

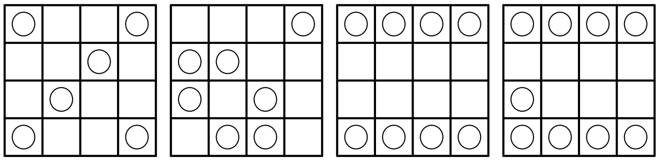
• **8.3.** Коля выбрал одну из клеток прямоугольника 6×8 и закрасил её. Слава может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Слава закрасить все оставшиеся клетки прямоугольника, независимо от того, какую клетку выбрал Коля?



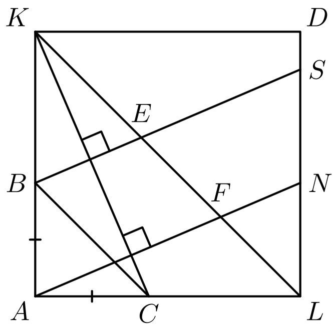
К реш. 8.2

Решение: Не сможет. Число отрезков, являющихся сторонами всех 48 клеточек, равно $6{\cdot}9+8{\cdot}7 = 110$. Докажем ответ задачи методом от противного. Предположим, что Слава смог закрасить весь прямоугольник. Будем называть сторону клеточки *закрашенной*, если закрашена хотя бы одна из прилегающих к ней клеток. Вначале закрашено 4 стороны. На каждом шаге Слава закрашивает 1 или 3 стороны. Всего таких шагов ему нужно сделать $6 \cdot 8 - 1 = 47$. Значит, если бы он смог закрасить весь прямоугольник, то число закрашенных сторон оказалось бы на 4 больше суммы 47 нечётных чисел (единиц и троек), то есть числу нечётному. Но это противоречит тому, что оно должно быть равно 110.

• **8.4.** На поле 4×4 расставили более 5, но менее 10 ладей так, что нет клетки, которая бьётся ровно одной ладьёй. Сколько ладей могло быть расставлено?
Решение: 6, 7, 8 или 9 (см. рис.).



• **8.5.** Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. На продолжениях катетов AB и AC за вершины B и C отложили равные отрезки BK и CL. Пусть E и F — точки пересечения отрезка KL и прямых, перпендикулярных KC и проходящих через точки B и A соответственно. Докажите, что $EF = FL$.



Решение: Достроим равнобедренный прямоугольный $\triangle AKL$ до квадрата $AKDL$ (см. рис.). Обозначим через S и N точки пересечения отрезка DL с прямыми BE и AF соответственно. Рассмотрим треугольники AKC и ANL. Это два прямоугольных треугольника с равными катетами ($AK = AL$) и острыми углами ($\angle AKC = \angle LAN$). Значит, они равны. Следовательно, $LN = AC$. Заметим, что $ABSN$ — параллелограмм (по определению). Из этого следует, что $AB = SN$. Учитывая, что, по условию, $AB = AC$, приходим к выводу, что $SN = NL$. Поскольку $BS||AN$, то по теореме Фалеса $EF = FL$.