Лужские группы Северо-Западной Заочной математической школы при СПбГУ
МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 3» г. Луги

ЧЕТВЁРТАЯ ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

5–8 классы

задачи и решения

г. Луга, 2009 г.

Четвёртая Открытая олимпиада по математике Лужских групп Заочной математической школы при СПбГУ и МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 3» г. Луги, 5–8 классы, 2009 г.

Результаты олимпиады будут опубликованы на странице `http://math.luga.ru/inf/compet/oolimp/4/`

Информация об олимпиаде

Региональный (областной) этап Всероссийской олимпиады школьников в Ленинградской области проводится только для учеников 9–11 классов — областной оргкомитет, к сожалению, не считает необходимым организовывать олимпиаду для младших школьников. Более того, в ряде городов области и муниципальный (районный) этап олимпиады проводится только для школьников 9–11 классов. Но олимпиадную работу среди способных детей, очевидно, необходимо начинать раньше. Возможность общения и соревнования со своими сверстниками из других городов — полезный и необходимый этап такой работы.

Желание исправить эту ситуацию подвигло к организации региональной олимпиады для школьников 5–8 классов. Её инициаторами стали лужские педагоги-математики, а в оргкомитет и жюри Открытой олимпиады вошли также студенты СПбГУ и других ВУЗов Санкт-Петербурга, в прошлом — преподаватели и ученики Лужских Летних математических школ (не только лужане), в том числе те, кто уже получил высшее математическое образование.

В 2006 году мы провели Первую Открытую олимпиаду по математике для младших школьников не только Лужского района, но всей Ленинградской области.

В этому году проходит уже четвёртая по счёту олимпиада, и мы надеются, что олимпиада будет продолжать жить.

Мы будем рады видеть Вас на V Открытой олимпиаде в апреле 2010 года!

Контактный тел. (81372) 266-10, e-mail: `psp@luga.ru`.
Наш сайт в интернете: `http://math.luga.ru`

На решение задач школьникам 5 классов отводилось 1,5 часа, 6 классов — 2 часа, 7–8 классов — 2,5 часа.

Оригинал-макет подготовлен в пакете LaTeX 2_ε с использованием шрифтов Computer Modern с кириллическим расширением LH. Иллюстрации подготовлены в пакете `metapost`.

5 класс

• **5.1.** Выступая на арене с 8 львами и 9 тиграми, дрессировщик потерял над ними контроль, и звери стали пожирать друг друга. Лев насытится, если съест трёх тигров, а тигр насытится, если съест двух львов. Какое наибольшее число хищников может насытиться? (Съеденное сытое животное продолжает считаться сытым.)

Решение: Так как лев насыщается, съедая 3 тигров, а всего тигров 9, то насытившихся львов не может быть более 3. Так как тигр насыщается, съедая 2 львов, а всего львов 8, то насытившихся тигров не может быть более 4. Значит, всего насытившихся зверей не более $3+4=7$. Чтобы их было 7, необходимо, чтобы все были съедены, чего быть не может. Значит, их не более 6. Пример насыщения 6 зверей таков: сначала 3 тигра съедают 6 львов, затем оставшиеся 2 льва съедают 6 тигров (включая 3 насытившихся), после этого на арене остались 2 сытых льва и 3 голодных тигра; теперь 1 тигр съедает 2 львов, и в итоге насытились 2 льва и 4 тигра.

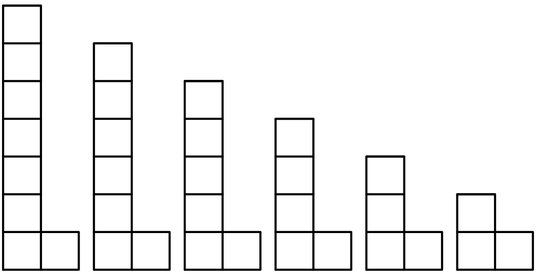
Ответ: **6 зверей.**

• **5.2.** В записи ОЛИМПИАДА + ПО + МАТЕМАТИКЕ поставьте вместо букв цифры, заменяя одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы — разными цифрами. Постарайтесь, чтобы получающаяся сумма была как можно меньше, и вычислите её.

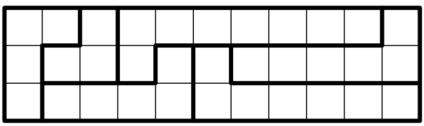
Решение: Минимальную возможную сумму можно получить, расставив цифры двумя способами: $245175080+72+1036103596$ или $245175090+72+1036103586$.

Ответ: **1281278748.**

• **5.3.** Сложите прямоугольник из всех шести уголков, изображённых на рисунке. (Накладывать уголки друг на друга нельзя.)



Решение: См. рис.



• **5.4.** Таня с ёжиком считали сумму $2\times3+3\times4+4\times5+\ldots+181\times182$. У Тани получилось 2009461, а у ёжика — 2009463. Кто из них ошибся?

Решение: Каждое слагаемое является произведением нечётного и чётного чисел, т. е. числом чётным. Значит, и сумма всех произведений чётна.

Ответ: **ошиблись и Таня, и ёжик.**

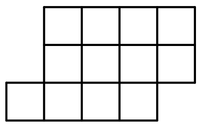
• **5.5.** Длину прямоугольника увеличили на 1 м, а ширину уменьшили на 1 см. Могла ли при этом площадь прямоугольника уменьшиться?
Решение: Если длина прямоугольника была 1000 см, ширина — 10 см, то площадь была 10000 кв. см. После изменения длина стала 1100 см, ширина — 9 см, и площадь стала 9900 кв. см.
Ответ: **могла.**

6 класс

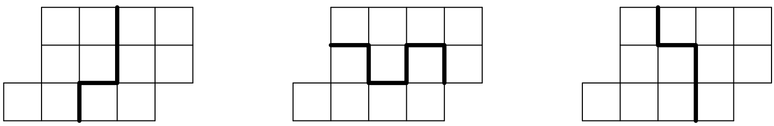
• **6.1.** Выступая на арене с 10 львами и 15 тиграми, дрессировщик потерял над ними контроль, и звери стали пожирать друг друга. Лев насытится, если съест трёх тигров, а тигр насытится, если съест двух львов. Какое наибольшее число хищников может насытиться? (Съеденное сытое животное продолжает считаться сытым.)
Решение: Так как лев насыщается, съедая 3 тигров, а всего тигров 15, то насытившихся львов не может быть более 5. Так как тигр насыщается, съедая 2 львов, а всего львов 10, то насытившихся тигров не может быть более 5. Значит, всего насытившихся зверей не более $5 + 5 = 10$. Чтобы их было 10, необходимо, чтобы все были съедены, чего быть не может. Значит, их не более 9. Пример насыщения 9 зверей таков: сначала 3 тигра съедают 6 львов, затем оставшиеся 4 льва съедают 12 тигров (включая 3 насытившихся), после этого на арене остались 4 сытых льва и 3 голодных тигра; теперь 2 тигра съедают 4 львов, и в итоге насытились 4 льва и 5 тигров.
Ответ: **9 зверей.**

• **6.2.** Можно ли вместо звёздочек записать все 10 цифр по одному разу так, чтобы было верным равенство $* + ** + *** = ****$?
Решение: Например, так: $2 + 46 + 987 = 1035$.
Ответ: **можно.**

• **6.3.** Разрежьте приведённую на рисунке фигуру на две равные части, делая разрезы только по линиям сетки. Постарайтесь найти как можно больше способов такого разрезания.



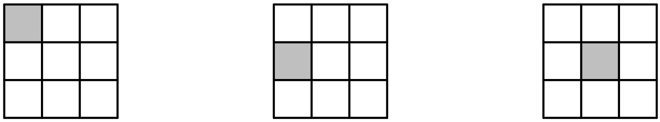
Решение: Есть 3 способа разрезания (см. рис.).



• **6.4.** Таня с ёжиком считали сумму $2\times3+3\times4+4\times5+\ldots+181\times182$. У Тани получилось 2009461, а у ёжика — 2009462. Кто из них ошибся?

Решение: Каждое слагаемое является произведением нечётного и чётного чисел, т. е. числом чётным. Значит, и сумма всех произведений чётна и Таня ошиблась. Число слагаемых равно 180. Последние цифры произведений повторяются десятками: 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0, 0, 2. В каждой из них сумма оканчивается нулём, поэтому сумма всех слагаемых оканчивается тоже нулём, и, значит, ёжик ошибся.
Ответ: **ошиблись и Таня, и ёжик.**

• **6.5.** Одну из клеток прозрачного поля 3×3 покрасили. Нарисуйте все возможные покраски одной клетки (если одна покраска получается из другой после поворота или переворота поля, то такие покраски считаются одинаковыми).
Решение: Таких покрасок всего 3 (см. рисунок):

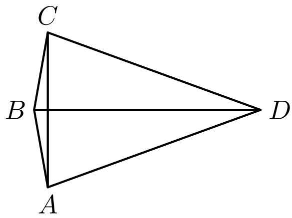


7 класс

• **7.1.** Мой любимый вишнёво-молочный коктейль делается смешиванием в миксере молока и вишнёвого сока. Я купил молока по цене 24 руб. за литр и вишнёвого сока по цене 40 руб. за литр и приготовил литр коктейля. Оказалось, что в полученном коктейле стоимость молока равна стоимости сока. Сколько стоит литр моего любимого коктейля?
Решение: На каждый рубль в миксер можно залить $\frac{1}{24}$ л молока или $\frac{1}{40}$ л сока, значит, на каждые 2 рубля получается $\frac{1}{24}+\frac{1}{40}=\frac{1}{15}$ л коктейля. Следовательно, 1 л коктейля стоит 30 руб. (Можно решить задачу с помощью уравнения, обозначив, например, за x число литров сока.)
Ответ: **30 руб.**

• **7.2.** Пятеро ёжиков сосчитали общее количество своих иголок. Могло ли оказаться, что у любых двух из них вместе менее $\frac{7}{22}$ общего числа иголок всех пяти ёжиков?
Решение: Если бы это было так, то у первого и второго ёжиков вместе было бы менее $\frac{7}{22}$ всех иголок, у третьего и четвёртого вместе — тоже менее $\frac{7}{22}$ всех иголок. Значит, у четырёх ёжиков вместе менее $\frac{7}{11}$ всех иголок. Но тогда у пятого ёжика более $1-\frac{7}{11}=\frac{4}{11}$ всех иголок, и получается, что у него вместе с любым другим ёжиком иголок более $\frac{4}{11}$ общего числа иголок, что противоречит условию задачи, поскольку $\frac{4}{11}>\frac{7}{22}$.
Ответ: **не могло.**

• **7.3.** Каждая диагональ четырёхугольника делит его на два равнобедренных треугольника. Можно ли утверждать, что этот четырёхугольник — ромб?



Решение: Пусть в четырёхугольнике $ABCD$: $AD = BD = CD \neq BC = AB$ (см. рис.). Тогда $\triangle BCD$, $\triangle BAD$, $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ — равнобедренные (в силу построения), но четырёхугольник $ABCD$ — не ромб, т. к. $CD \neq BC$.

Ответ: **утверждать нельзя.**

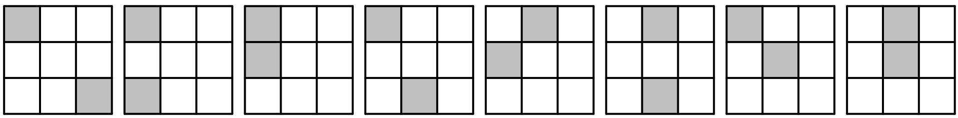
• **7.4.** Чему может быть равна сумма цифр натурального числа, делящегося на 7 ?

Решение: Сумма цифр не может быть равна 1, т. к. число с такой суммой цифр имеет вид $100\ldots0$ и не делится на 7. Так как число вида $10011001\ldots1001$ делится на 7, то сумма цифр может быть равна любому чётному натуральному числу. Поскольку число вида $2110011001\ldots1001$ делится на 7, то сумма цифр может быть любым нечётным числом, начиная с 5. Сумма цифр 3 тоже может быть — такова она у числа 21.

Ответ: **любому натуральному числу, кроме** 1.

• **7.5.** Две клетки прозрачного поля 3×3 покрасили всеми возможными способами (если одна покраска двух клеток получается из другой после поворота или переворота поля, то такие покраски считаются одинаковыми). Нарисуйте все возможные покраски двух клеток.

Решение: Таких покрасок всего 8 (см. рис.):



8 класс

• **8.1.** Когда от натурального числа x отняли его сумму цифр, получили 3456. Найдите все такие x.

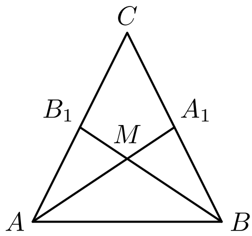
Решение: Так как сумма цифр пятизначного числа не более 45, то x — число четырёхзначное, причём первая его цифра равна 3. Значит, сумма его цифр не более $3 + 9 \cdot 3 = 30$. Следовательно, его вторая цифра — 4. Значит, сумма цифр числа x не более $3 + 4 + 9 \cdot 2 = 25$, а само число x не более $3456 + 25 = 3481$. А так как сумма цифр числа x не менее $3 + 4 = 7$, то $x \geqslant 3456 + 7 = 3463$. Перебирая числа от 3463 до 3481, находим все такие x.

Ответ: **3470, 3471, 3472, 3473, 3474, 3475, 3476, 3477, 3478, 3479.**

• **8.2.** Докажите, что если числа a, b, c таковы, что $a + \dfrac{b}{c} = b + \dfrac{c}{a} = c + \dfrac{a}{b} = 1$, то $ab + bc + ca = 0$.

Решение: Приравнивая каждую сумму к 1, получаем, что $ac + b = c$, $ab + c = a$, $bc + a = b$. Отсюда следует, что $ac = c - b$, $ab = a - c$, $bc = b - a$. Значит, $ac + ab + bc = c - b + a - c + b - a = 0$.

• **8.3.** В треугольнике ABC равные медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, причём $\angle AMB = 120°$. Докажите, что углы AB_1M и BA_1M не могут быть оба острыми или оба тупыми.



Решение: Так как медианы AA_1 и BB_1 равны, то $MA_1 = AA_1/3 = BB_1/3 = MB_1 = MB/2$. Таким образом, в треугольнике MA_1B: $\angle A_1MB = 60°$, $MA_1 = MB/2$. Следовательно, $\angle MBA_1 = 30°$ (если бы он был больше или меньше $30°$, то соответственно внутри отрезка MA_1 или на его продолжении нашлась бы точка A_2, для которой $MA_1 = MA_2$, чего быть не может) и $\angle MA_1B = 90°$.

• **8.4.** За 2007-й год количество ёжиков в Муромском лесу выросло на n, а за 2008-ой — на 300. При этом за 2007-й год их численность увеличилась на 300%, а за 2008-й — на n%. Сколько ёжиков стало в Муромском лесу к концу 2008-го года?

Решение: Обозначим количество ёжиков в лесу в конце 2006 года через k. Так как за 2007-й год их численность увеличилась на 300%, то к концу 2007-го года ёжиков стало $4k$. С другой стороны, из условия следует, что их стало $k + n$. Значит, $4k = k + n$, т. е. $3k = n$ (*). К концу 2008-го года в лесу стало $4k + 300$ ёжиков. Поскольку за 2008-й год ёжиков стало на n% больше, то $\frac{300}{4k} = \frac{n}{100}$. Подставляя сюда (*), получим, что $12k^2 = 30000$, откуда $k = 50$. Следовательно, $4k + 300 = 500$.

Ответ: **500 ёжиков.**

• **8.5.** Играя в классики (см. рис.), Таня прыгнула снаружи на клетку 1, а затем каждый прыжок делала на соседнюю (по стороне) клетку. Через некоторое время Таня выпрыгнула наружу из клетки 10. Оказалось, что на клетке 1 она была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз Таня могла побывать на клетке 10 ?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Решение: При каждом прыжке чётность номера клетки меняется, значит, число прыжков на клетки с чётными номерами равно числу прыжков на клетки с нечётными номерами. Значит, обозначая число прыжков на клетку 10 через x, получаем: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 2 + 4 + 6 + 8 + x$. Отсюда $x = 5$.

Ответ: **5 раз.**