Лужские группы Северо-Западной Заочной математической школы при СПбГУ
МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 3» г. Луги

ПЯТАЯ ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

5–8 классы

задачи и решения

г. Луга, 2010 г.

Пятая Открытая олимпиада по математике Лужских групп Заочной математической школы при СПбГУ и МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 3» г. Луги, 5–8 классы, 2010 г.

Результаты олимпиады будут опубликованы на странице `http://math.luga.ru/inf/compet/oolimp/5/`

На решение задач школьникам 5 классов отводилось 1,5 часа, 6 классов — 2 часа, 7–8 классов — 2,5 часа.

Контактный тел. (81372) 266-10, e-mail: `psp@luga.ru`.
Наш сайт в интернете: `http://math.luga.ru`

Оригинал-макет подготовлен в пакете LaTeX 2_ε с использованием шрифтов Computer Modern с кириллическим расширением LH. Иллюстрации подготовлены в пакете `metapost`.

©, 2010, PSP Inc.

История олимпиады

Третий (областной) этап Всероссийской олимпиады в Ленинградской области на протяжении многих лет проводится только для 9–11 классов. Почему только для них? Да потому, что отсутствует желание у областного оргкомитета пошевелиться и подтвердить делами свои речи и отчёты о работе с теми школьниками, которых в последнее время стали называть с пафосом — *одарёнными* (а это просто нормальные любознательные дети, которым интересна математика).

Во многих городах области и районная олимпиада проводится только для старших школьников (равнение на «область»). Но олимпиадную работу среди способных детей, очевидно, необходимо начинать не с 9 класса, а раньше — и это понятно любому профессиональному педагогу.

В Луге много лет тому назад письменные личные олимпиады для учеников 5–8 классов стали проводиться по инициативе неравнодушных педагогов. В их проведении и проверке работ школьников активное участие принимали студенты — в недавнем прошлом победители олимпиад. Полезность таких профессионально подготовленных и грамотно проведённых олимпиад (с разбором задач, показом работ и возможностью апелляции) была очевидна: лужане стали занимать на областных олимпиадах не только все первые места во всех классах, но ещё и вторые — школьники привозили по 6–8 дипломов.

Затем произошли события, не укладывающиеся в рамки здравого смысла: студентов запретили допускать на олимпиады, составление задач поручили людям, не имеющим олимпиадного опыта, а разбор задач и апелляцию фактически ликвидировали. Результаты не заставили себя ждать: показатели лужских школьников катастрофически упали (уже два года у них нет ни одного первого места).

Но именно эта странная политика чиновников от образования подтолкнула инициативную группу лужских педагогов-математиков к организации *нормальной* олимпиады для школьников 5–8 классов.

В 2006 году для учеников 5–8 классов не только Лужского района, но всей Ленинградской области была проведена Первая Открытая олимпиада по математике. Мероприятие прошло успешно. Судя по отзывам детей и учителей, приезжавших с ними, олимпиада понравилась. Возникло желание сделать мероприятие регулярным. И оно таким стало!

В 2009 году состоялась IV Открытая олимпиада. В состав её оргкомитета и жюри входили: учителя математики СОШ № 3 Л. И. Панарина, Л. Н. Рысева; руководитель Лужских групп ЗМШ С. П. Павлов; выпускники мат-меха (математико-механического факультета) СПбГУ В. А. Васильев, И. А. Ларионов, А. С. Рыжков; студенты мат-меха Ю. В. Воробьёв, А. Ю. Ермаков, А. С. Каваленков, Д. В. Копин, И. В. Меженько, А. С. Расторгуев, С. С. Шорохов; студент ВШМ СПбГУ Г. В. Александров; студенты ЛИТМО А. Ю. Калинин, А. А. Шевченко.

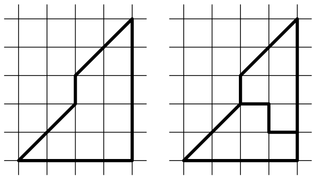
В Открытых олимпиадах 2006–2009 гг. участвовали школьники Великого Новгорода, Войсковиц, Волхова, Гатчины, Елизаветино, Киришей, Луги, Сиверского, Соснового Бора.

В последние два года регламент олимпиады таков: на решение задач 5-классникам отводится 1,5 часа, 6-классникам — 2 часа, ученикам 7–8 классов — 2,5 часа. Разумеется, в 7 и 8 классах хотелось бы предоставить больше времени на решение, но жюри необходимо успеть проверить работы, сообщить участникам о критериях проверки, провести показ работ (каждый участник имеет право посмотреть свою работу, может поспорить с жюри, апеллировать — просить перепроверить решения тех или иных задач), подвести итоги, наградить призёров, причём закончить всё это не поздно — так, чтобы иногородние успели на непозднюю электричку.

Но овчинка выделки несомненно стоит: школьникам удаётся устроить праздник знаний, в котором могут участвовать не только два человека от школы (как это в последние годы делается в Луге), не только победитель районной олимпиады (как это сделано на областном уровне), а любой желающий, которому интересна математика.

Условия и решения задач 5 класса

• **5.1.** Оля хочет разрезать изображённый на рисунке пятиугольник на две одинаковые (совпадающие при наложении) части. Как ей это сделать?



Решение: Например, так, как показано на рисунке.

• **5.2.** Кузнечик Кузя прыгает по прямой вперёд на 80 см или назад на 50 см. Может ли Кузя менее чем за 7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см?

Ответ: **может.**

Решение: Прыгает 5 раз назад и 1 раз вперёд. В итоге он окажется на расстоянии $5 \times 50 - 80 = 170$ см.

• **5.3.** На каждой клетке поля 5×5 стоит фишка. Егор поочерёдно убирает фишки с поля по следующему правилу: убирать можно только ту фишку, которая находится на диагонали, на которой в данный момент стоит чётное число фишек. (Рассматриваются все 14 диагоналей поля 5×5.) Объясните, в каком порядке Егору надо убирать фишки, чтобы в итоге снять с поля как можно больше фишек. (Порядок снятия фишек обозначайте числами $1, 2, 3, \ldots$. Объяснять, почему большее число фишек Егору не убрать, не надо.)

Ответ: **Егор сможет убрать максимум 11 фишек.**

Решение: Один из возможных способов снятия 11 фишек показан на рисунке.

	11		6	
		10		5
	2		8	
3		9		7
	4		1	

• **5.4.** Даня хочет, использовав одну единицу, две двойки, три тройки, четыре четвёрки, пять пятёрок, шесть шестёрок и семь семёрок, составить число, делящееся на 33. Получится ли это у него?

Ответ: **не получится.**

Решение: Сумма всех использованных цифр равна $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 5 + 6 \times 6 + 7 \times 7 = 140$. Значит, по признаку делимости на 3, составленное число не делится на 3. Значит, не делится и на 33.

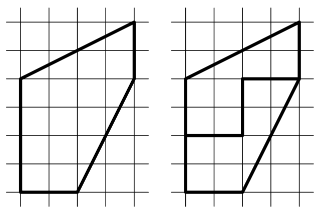
• **5.5.** Пять футбольных команд провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Четыре команды набрали соответственно 1, 2, 5 и 7 очков. А сколько очков набрала пятая команда?

Ответ: **12 очков.**

Решение: Каждая команда сыграла по 4 матча. Будем обозначать выигрыш, ничью и проигрыш через В, Н, П соответственно. У 1-ой команды (набравшей 1 очко): Н, П, П, П. У 2-ой команды (набравшей 2 очка): Н, Н, П, П. У 3-ей команды (набравшей 5 очков): В, Н, Н, П. У 4-ой команды (набравшей 7 очков): В, В, Н, П. Всего у этих 4 команд 7 проигрышей и 3 выигрыша. Значит, остальные $7 - 3 = 4$ выигрыша приходятся на 5-ю команду. А так как она сыграла 4 матча, то набрала $4 \times 3 = 12$ очков.

Условия и решения задач 6 класса

• **6.1.** Таня хочет разрезать изображённый на рисунке пятиугольник на две одинаковые (совпадающие при наложении) части. Как ей это сделать?



Решение: Например, так, как показано на рисунке.

• **6.2.** Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая у Пятачка?

Ответ: **у Пуха — $\frac{6}{7}$, у Пятачка — $\frac{1}{7}$.**

Решение: Если сначала Пятачку досталось x граммов торта, то затем у него стало $3x$ граммов торта. Значит, Пух отдал Пятачку $3x - x = 2x$ граммов торта. По условию, это являлось третью первоначальной доли Пуха, т. е. сначала его доля была втрое больше, т. е. $6x$ граммов. Значит, в начале у Пятачка было x граммов торта, у Пуха — $6x$ граммов торта, и весь торт имел массу $x + 6x = 7x$ граммов.

• **6.3.** См. задачу № 5 для 5 класса.

• **6.4.** На каждой клетке поля 4×4 стоит фишка. Умная Маша поочерёдно удаляет фишки с поля по следующему правилу: убирать можно только ту фишку, которая находится на диагонали, на которой в данный момент стоит чётное число фишек. (Рассматриваются все 10 диагоналей поля 4×4.) Объясните, в каком порядке Маше надо убирать фишки, чтобы в итоге снять с поля как можно больше фишек. (Порядок снятия фишек обозначайте числами 1, 2, 3, ... Объяснять, почему большее число фишек Маше не убрать, не надо.)

Ответ: **Маша сможет убрать максимум 12 фишек.**

Решение: Один из возможных способов снятия 12 фишек показан на рисунке.

1	12	6	7
9			3
2	10	4	8
11			5

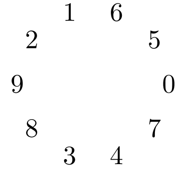
• **6.5.** Серёжа вырезал по линиям из клетчатой бумаги (клетки 1 см × 1 см) прямоугольник, затем по линиям вырезал квадратик 2 см × 2 см с краю (но не в углу) прямоугольника и объявил: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, как была площадь прямоугольника, а площадь оставшейся фигуры — такая же, как был периметр прямоугольника!» (Периметр измерялся в сантиметрах, площадь — в квадратных сантиметрах.) Можно ли по этим данным точно определить периметр прямоугольника?

Ответ: **нет, нельзя.**

Решение: Нетрудно проверить, что условию задачи удовлетворяют и прямоугольник 3 см × 10 см, и прямоугольник 4 см × 6 см. Но у первого прямоугольника периметр 26 см, у второго — 20 см.

Условия и решения задач 7 класса

• **7.1.** Женя решила расставить по окружности все 10 цифр так, чтобы сумма любых двух соседних цифр была простым числом. (Простым называется натуральное число, у которого только два натуральных делителя — само число и единица.) Может ли это у неё получиться?



Ответ: **может.**

Решение: Цифры можно расставить так, как показано на рисунке.

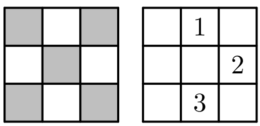
• **7.2.** Различные числа a, b, c таковы, что $b^2 + ac = c^2 + ab$. Докажите, что одно из чисел равно сумме двух других.
Решение:

$$b^2 + ac = c^2 + ab \Leftrightarrow b^2 - c^2 + ac - ab = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b - c)(b + c) - a(b - c) = 0 \Leftrightarrow (b - c)(b + c - a) = 0.$$

Так как числа различны, то $b + c - a = 0$, т. е. $a = b + c$.

• **7.3.** Маша в честь наступившего 2010-го года сочинила новый признак равенства треугольников: «Если в каждом из двух равнобедренных треугольников есть сторона длиной 2010 мм и угол, величина которого 58°, то треугольники равны». Верен ли Машин признак?
Ответ: **нет.**
Решение: Пусть в первом треугольнике длина основания равна 2010 мм и угол при вершине равен 58°, а во втором — боковые стороны по 2010 мм, а угол при основании 58°. Эти треугольники не равны, т. к. у первого треугольника величины углов 58°, 61°, 61°, а у второго — 58°, 58°, 64°.

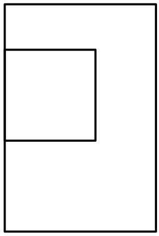
• **7.4.** На каждой клетке поля 3×3 стоит фишка. Герман поочерёдно удаляет фишки с поля по следующему правилу: убирать можно только ту фишку, которая находится на диагонали, на которой в данный момент стоит чётное число фишек. (Рассматриваются все 6 диагоналей поля 3×3.) Какое наибольшее число фишек Герман сможет убрать с поля?
Ответ: **3 фишки.**



Решение: Выкрасим клетки поля в шахматном порядке так, как показано на рисунке. Ясно, что фишки с чёрных и белых клеток убираются независимо друг от друга. С чёрных клеток ни одной фишки не убрать (ни одной чёрной клетки нет на диагонали, где чётное число клеток). С белых клеток, очевидно, не убрать все фишки (хотя бы одна должна остаться). Значит, всего с поля убрать можно не более 3 фишек. Убрать 3 фишки действительно можно (см. рисунок).

• **7.5.** Серёжа вырезал по линиям из клетчатой бумаги (клетки 1 см × 1 см) прямоугольник, затем по линиям вырезал квадратик 2 см × 2 см с краю (но не в углу) прямоугольника. Оказалось, что у оставшейся фигуры периметр такой же, как была площадь прямоугольника, а площадь оставшейся фигуры — такая же, как был периметр прямоугольника. (Периметр измерялся в сантиметрах, площадь — в квадратных сантиметрах.) Каковы размеры Серёжиного прямоугольника?

Ответ: 3 **см** × 10 **см или** 4 **см** × 6 **см.**



Решение: Обозначим длины (в сантиметрах) сторон прямоугольника через x и y, тогда периметр прямоугольника $2(x+y)$ см, площадь xy кв. см. После вырезания квадрата площадь уменьшилась на 4 кв. см и стала $xy-4$ кв. см, а периметр увеличился на удвоенную длину стороны квадрата (см. рисунок) и стал равен $2(x+y)+4$ см. По условию задачи составляем уравнение: $2(x+y)+4 = xy$. Преобразовываем его: $2(x+y)+4 = xy \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow xy-2x-2y = 4 \Leftrightarrow xy-2x-2y+4 = 8 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 8$, откуда понятно, что значения выражений в скобках либо 1 и 8, либо 2 и 4. Это и даёт два решения задачи.

Условия и решения задач 8 класса

• **8.1.** Егор пытается расставить числа 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 в ряд так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом. (Простым называется натуральное число, у которого ровно два натуральных делителя — само число и единица.) Может ли у него это получиться?

Ответ: **может.**

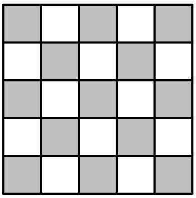
Решение: Числа можно расставить, например, так: 20, 11, 12, 17, 14, 15, 16, 13, 18, 19.

• **8.2.** На каждой клетке поля 5×5 стоит фишка. Саша поочерёдно удаляет фишки с поля по следующему правилу: убирать можно только ту фишку, которая находится на диагонали, на которой в данный момент стоит чётное число фишек. (Рассматриваются все

14 диагоналей поля 5×5.) Какое наибольшее число фишек Саша сможет убрать с поля?

Ответ: **11 фишек.**

Решение: Выкрасим клетки поля в шахматном порядке так, как показано на рисунке.



	11		6	
		10		5
	2		8	
3		9		7
	4		1	

Ясно, что фишки с чёрных и белых клеток убираются независимо друг от друга. С чёрных клеток ни одной фишки не убрать (ни одной чёрной клетки нет на диагонали, где чётное число клеток). С белых клеток, очевидно, не убрать все фишки (хотя бы одна должна остаться). Значит, всего с поля убрать можно не более 11 фишек. Убрать 11 фишек действительно можно (см. рисунок).

• **8.3.** Числа a, b, c — различны. Может ли оказаться, что

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\ ?$$

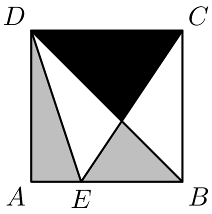
Ответ: **не может.**

Решение:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{a^2c+ab^2+bc^2}{abc}=\frac{a^2b+ac^2+b^2c}{abc} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2c+ab^2+bc^2-a^2b-ac^2-b^2c=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a^2c-a^2b)+(ab^2-ac^2)+(bc^2-b^2c)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2(c-b)-a(c-b)(c+b)+bc(c-b)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (c-b)(a^2-ac-ab+bc)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (c-b)\big(a(a-c)-b(a-c)\big)=0 \Leftrightarrow (c-b)(a-b)(a-c)=0,$$

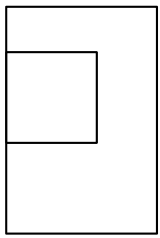
а этого быть не может, т. к. числа a, b, c различны.

• **8.4.** На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена произвольная точка E (см. рисунок). Докажите, что сумма площадей серых частей равна площади чёрной части.



Решение: Обозначим площадь чёрной части b, серой — g, площадь левого белого треугольника — l, правого белого — r. Поскольку площади треугольников DEC и DBC равны (у них общее основание DC и равные высоты), а чёрный треугольник — общий, то $l = r$. С другой стороны, очевидно, $g + l = b + r$ (и то, и другое — это половина площади квадрата). Значит, $g = b$.

• **8.5.** Серёжа вырезал по линиям из клетчатой бумаги (клетки 1 см $\times$ 1 см) прямоугольник, затем по линиям вырезал квадратик с краю (но не в углу) прямоугольника. Оказалось, что у оставшейся фигуры периметр такой же, как была площадь прямоугольника, а площадь оставшейся фигуры — такая же, как был периметр прямоугольника. (Периметр измерялся в сантиметрах, площадь — в квадратных сантиметрах.) Каковы были размеры Серёжиных прямоугольника и квадрата?



Ответ: **Прямоугольник 3 см $\times$ 10 см или 4 см $\times$ 6 см, квадрат 2 см $\times$ 2 см.**

Решение: Обозначим длины (в сантиметрах) сторон прямоугольника через x и y, сторон квадрата через a. Тогда у прямоугольника были периметр $2(x + y)$ см и площадь xy кв. см. После вырезания квадрата площадь уменьшилась на a^2 кв. см. и стала равна $xy - a^2$ кв. см, а периметр увеличился на удвоенную длину стороны квадрата (см. рисунок) и стал равен $2(x + y) + 2a$ см. По условию задачи составляем уравнения: $2(x+y) = xy-a^2$ и $2(x+y)+2a = xy$. Отсюда получаем, что $a^2 = 2a$, т. е. $a = 2$. Подставляя в любое из уравнений $a = 2$, получаем $2(x+y)+4 = xy$. Преобразовываем его: $2(x + y) + 4 = xy \Leftrightarrow xy - 2x - 2y = 4 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) = 8$, откуда понятно, что значения выражений в скобках либо 1 и 8, либо 2 и 4. Это и даёт два варианта размеров прямоугольника.