Лужские группы Заочной математической школы
МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 3» г. Луги

VII ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

5–8 классы

задачи и решения

г. Луга, 2012 г.

VII Открытая олимпиада по математике Лужских групп Заочной математической школы и МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 3» г. Луги, 5–8 классы, 2012 г.

Результаты олимпиады будут опубликованы на странице `http://math.luga.ru/inf/compet/oolimp/7/`

На решение задач школьникам 5 классов отводилось 1,5 часа, 6 классов — 2 часа, 7–8 классов — 2,5 часа.

Контактный тел. (81372) 266-10, e-mail: `psp@luga.ru`.
Наш сайт в интернете: `http://math.luga.ru`

Оригинал-макет подготовлен в пакете LaTeX 2$_\varepsilon$ с использованием шрифтов Computer Modern с кириллическим расширением LH. Иллюстрации подготовлены в пакете `metapost`.

История олимпиады

Третий (региональный, или областной) этап Всероссийской олимпиады в Ленинградской области на протяжении многих лет проводится только для 9–11 классов. Почему только для них? Да потому, что областной оргкомитет не подтверждает делами свои речи и отчёты о работе с теми школьниками, которых в последнее время стали называть с пафосом — *одарёнными* (а это просто нормальные любознательные дети, которым интересна математика, которые хотят её изучать более глубоко, не довольствуясь лишь тем, что они получают в школе).

Во многих городах области и районная олимпиада проводится только для старших школьников (равнение на «область»). Но олимпиадную работу среди способных детей, очевидно, необходимо начинать не с 9 класса, а раньше — и это понятно любому профессиональному педагогу.

В Луге много лет тому назад письменные личные олимпиады для учеников 5–8 классов стали проводиться по инициативе неравнодушных педагогов. В их проведении и проверке работ школьников активное участие принимали студенты — в недавнем прошлом победители олимпиад. Полезность таких профессионально подготовленных и грамотно проведённых олимпиад (с разбором задач, показом работ и возможностью апелляции) очевидна: лужане стали занимать на областных олимпиадах не только все первые места во всех классах, но ещё и вторые — школьники привозили по 6–8 дипломов. Лужане были победителями областных олимпиад и в 9, и в 10, и в 11 классах — этому в немалой мере способствовала система олимпиад для школьников 4–8 классов.

Затем произошли печальные события, и уровень олимпиад снизился. Результаты не заставили себя ждать: показатели лужских школьников катастрофически упали (уже четыре года на областных математических олимпиадах никто из лужан не становится победителем).

Именно это подтолкнуло инициативную группу лужских педагогов-математиков к организации *настоящей* олимпиады для школьников 5–8 классов.

В 2006 году для учеников 5–8 классов не только Лужского района, но всей Ленинградской области была проведена Первая Открытая олимпиада по математике. Мероприятие прошло успешно. Судя по отзывам детей и учителей, приезжавших с ними, олимпиада понравилась. Возникло желание сделать мероприятие регулярным. И оно таким стало!

В 2011 году состоялась VI Открытая олимпиада. В состав её оргкомитета и жюри входили руководитель Лужских групп ЗМШ С. П. Павлов, учитель математики СОШ № 3 г. Луги Л. Н. Рысева и выпускник матмеха (математико-механического факультета) СПбГУ А. С. Рыжков.

Состав жюри VI Открытой олимпиады: аспирант матмеха В. И. Щипцов, выпускники матмеха В. А. Васильев, А. В. Гелеранский, С. С. Крутикова, И. А. Ларионов, Д. В. Родионов, А. В. Тарасов, Д. Б. Хлонин, Е. В. Шавердова, руководитель управления Санкт-Петербургской Химической Компании С. Л. Жуков, М. А. Пирожков, выпускник ЛИТМО Д. В. Данилков, преподаватель ЛМШ И. В. Жеребятьев, студенты матмеха М. А. Ведерникова, А. С. Каваленков, И. В. Меженько, Е. В. Степанов, С. С. Шорохов, А. А. Теслер, студенты ПМ-ПУ Ю. В. Воробьёв и Г. В. Ярыш, студент Политехнического университета М. А. Васильев, ученик Академической гимназии СПбГУ И. Белехов, старшеклассники Е. Голованов, А. Лучко, С. Лучко, Д. Семёнов, В. Шалагинов (школа № 3 г. Луги), С. Арефьев (школа № 2 г. Луги).

Почти все названные выше члены жюри — бывшие или нынешние ученики Заочной математической школы (ЗМШ) и Летней математической школы (ЛМШ). Но они — не просто хорошие бывшие или нынешние ученики, а люди, понимающие, что внесение своего вклада в развитие математического образования школьников России — это не просто высокие слова. Это — важное дело. И, как всякое большое дело, совершается оно усилиями не одного человека, а стараниями многих людей. Приятно осознавать, что это понимают те, кто когда-то сами учились в Заочной и Летней математических школах. Спасибо им за понимание и помощь!

В VI Открытой олимпиаде (2011 г.) участвовали школьники Гатчины (лицей № 3, СОШ № 9) и Гатчинского района (Сиверская гимназия), Лужского района (СОШ № 3, СОШ № 6, Оредежская школа), Великого Новгорода (гимназия № 2), Санкт-Петербурга (лицеи № 393 и № 533, школы № 264 и № 571) — всего 179 человек.

На решение олимпиадных задач 5-классникам отводилось 1,5 часа, 6-классникам — 2 часа, ученикам 7–8 классов — 2,5 часа. Разумеется, в 7 и 8 классах хотелось бы предоставить больше времени, но жюри было необходимо успеть проверить работы, сообщить участникам о критериях проверки, провести показ работ (каждый участник получал свою работу, смотрел её и мог апеллировать — просить перепроверить решения тех или иных задач, поспорить с жюри), подвести итоги, наградить призёров, причём закончить всё это не поздно — так, чтобы иногородние успели на непозднюю электричку.

Но овчинка стоит выделки: удаётся устроить для школьников праздник знаний, в котором могут участвовать не только те, кому разрешили это сделать, не только победители районного тура (как это сделано в жёсткой системе Всероссийской олимпиады), но любой желающий, которому интересна математика. И в этом главная ценность наших Открытых олимпиад.

Условия и решения задач 5 класса

• **5.1.** Напишите все целые числа от 122 до 168, не имеющие нуля в своей записи, у которых произведение всех цифр делится на сумму всех цифр.

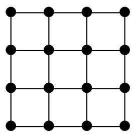
Ответ: **123, 132, 138, 145, 154, 159, 167.**

• **5.2.** На каждом километре дороги между городами Апельсиново и Мандариново стоит километровый столб с табличкой, на одной стороне которой указано расстояние до Апельсинова, на другой — до Мандаринова. Гуляя по этой дороге, пёсик Фафик заметил, что на одной из табличек сумма этих двух чисел равна 2012, а на другой — числа одинаковы. Чему могут быть равны эти одинаковые числа?

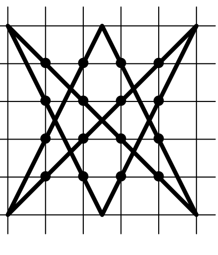
Ответ: **только 1006.**

Решение: Сумма чисел, написанных с двух сторон одной таблички, — это расстояние между Апельсиново и Мандариново. Значит, это расстояние равно 2012. На табличке с одинаковыми числами указано по половине расстояния, т. е. на ней написаны числа $2012 : 2 = 1006$.

• **5.3.** Перечеркните все шестнадцать точек, изображённых на рисунке, несколькими отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя отрезков по линиям сетки. Постарайтесь, чтобы отрезков было как можно меньше.



Решение: на рисунке показано, как можно перечеркнуть все 16 точек, проведя 6 отрезков. (Меньшего количества отрезков не хватит — это утверждение формулировать не требуется; достаточно рисунка.)



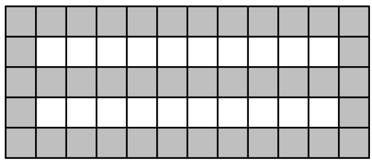
• **5.4.** Известно, что $ЖЖ + Ж = МЁД$. Какой цифрой может оканчиваться произведение $В \times И \times Н \times Н \times И \times П \times У \times Х$? (Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми — одинаковые.)

Ответ: **только цифрой 0.**

Решение: Сумма $ЖЖ+Ж$ будет трёхзначным числом только в том случае, если $Ж = 9$ (если $Ж \leqslant 8$, то $ЖЖ+Ж \leqslant 88+8 = 96$). А так как Ж = 9, то ЖЖ + Ж = 108, М = 1, Ё = 0, Д = 8. Поскольку различных букв в условии задачи 10 (Ж, М, Ё, Д, В, И, Н, П, У, Х), то ими зашифрованы все цифры от 0 до 9. Значит, одна из букв В, И, Н, П, У или Х равна 5, а одна из них равна 2. Следовательно, их произведение делится на 10, т. е. оканчивается нулём.

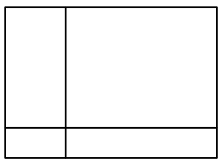
• **5.5.** Из листа клетчатой бумаги вырезан по линиям сетки прямоугольник, у которого некоторые клетки чёрные, а остальные — белые. Каждую секунду все белые клетки, у которых хотя бы три соседние клетки — чёрные, становятся чёрными, а все чёрные клетки, у которых хотя бы три соседних клетки — белые, становятся белыми (остальные клетки не меняют свои цвета). Может ли оказаться, что через несколько секунд чёрных клеток станет в полтора раза больше, чем было? (Соседними здесь считаются клетки, которые имеют общую сторону.)

Ответ: **может.**



Решение: Так будет, например, если прямоугольник имеет размеры 5×12 и в нём изначально 40 чёрных клеток (см. рисунок). Через 5 секунд все его клетки станут чёрными, и их будет 60, т. е. в полтора раза больше, чем было.

Условия и решения задач 6 класса

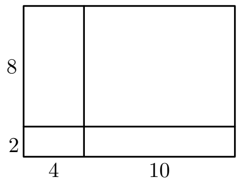


• **6.1.** На рисунке справа можно найти 9 прямоугольников. Известно, что длина и ширина каждого — целые числа. Сколько из этих 9 прямоугольников могут иметь нечётные площади?

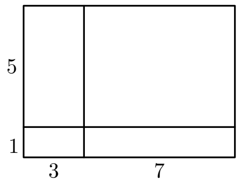
Ответ: **0 или 4.**

Решение: Первый способ. Будем называть прямоугольники с нечётными площадями *нечётными*, а с чётными площадями — *чётными*. Бóльшая и меньшая стороны (измерения) большого прямоугольника разбиты на два отрезка. Для каждого из измерений возможны два случая: а) все три отрезка имеют чётную длину; б) два отрезка имеют нечётную длину, один — чётную. Если хотя бы по одному измерению все отрезки чётной длины, то все прямоугольники чётные, и, тем самым, число нечётных прямоугольников равно 0. А если по обоим измерениям реализуется случай б), то нечётных прямоугольников, очевидно, 4.

Второй способ решения состоит из двух частей: 1) приведение двух примеров: когда нечётных прямоугольников 0 и когда их 4; 2) доказательство того, что 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 или 9 нечётных прямоугольников быть не может (перебором).



1) См. рисунок.



2) При полном переборе рассматриваются 16 вариантов (для каждого из четырёх отрезков, из которых состоят измерения большого прямоугольника, рассматриваются случаи, когда они чётные и когда нечётные). При более разумном переборе рассматриваются 6 вариантов: ЧЧ и ЧЧ, ЧЧ и ЧН, ЧЧ и НН, ЧН и ЧН, ЧН и НН, НН и НН.

• **6.2.** На каждом километре дороги между деревнями Огурцово и Помидорино стоит километровый столб с табличкой, на одной стороне которой указано расстояние до Огурцова, на другой — расстояние до Помидорина. Гуляя по этой дороге, пёсик Фафик для каждой таблички подсчитал наибольший общий делитель записанных на ней чисел. Оказалось, что среди полученных им чисел встретились только 1, 2 и 3 (каждое хотя бы по одному разу). Найдите расстояние между деревнями.

Ответ: **6 км.**

Решение: Разобьём решение на три части.

1) Сумма написанных на каждой табличке чисел — это расстояние между деревнями. Так как есть табличка, на которой НОД написанных чисел равен 2, то каждое из чисел, а, значит, и расстояние делится на 2. Аналогично, расстояние делится на 3. Значит, расстояние делится на 6.

2) Если бы расстояние было больше 6, то на каждом шестом столбе оба числа делились бы на 6, их НОД был бы не меньше 6, что противоречило бы условию.

3) При расстоянии 6 км на столбиках такие таблички: $(1, 5)$,

$(2, 4)$, $(3, 3)$, и это удовлетворяет условию.

• **6.3.** Напишите все целые числа от 322 до 366, не имеющие нуля в своей записи, у которых произведение всех цифр делится на сумму всех цифр.

Ответ: **325, 333, 345, 347, 352, 354, 357.**

• **6.4.** Ангелина, Лиза, Олеся, Оля и Яна сложились и купили вкусный торт. Могло ли так оказаться, что любые две девочки внесли вместе менее трети стоимости торта?

Ответ: **не могло.**

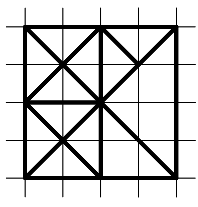
Решение: Докажем ответ методом от противного. Пусть такое случилось. Тогда Ангелина и Лиза внесли вместе менее трети стоимости, Олеся и Оля вместе — тоже меньше трети. Значит, Ангелина, Лиза, Олеся, Оля внесли вместе менее двух третей. Тогда выходит, что Яна внесла более одной трети стоимости. Но тогда Яна и Оля внесли вместе более трети стоимости, что противоречит условию.

• **6.5.** См. задачу 5.5.

Условия и решения задач 7 класса

• **7.1.** Разрежьте квадрат на 12 прямоугольных треугольников, так чтобы 10 из них оказались равными друг другу, а два оставшихся отличались и от них, и друг от друга. (Достаточно привести один вариант разрезания.)

Решение: Например, так, как показано на рисунке.



• **7.2.** На каждом километре дороги между деревнями Редискино и Укропино стоит километровый столб с табличкой, на одной стороне которой указано расстояние до Редискина, на другой — расстояние до Укропина. Гуляя по этой дороге, пёсик Фафик для каждой таблички подсчитал наибольший общий делитель записанных на ней чисел. Оказалось, что среди полученных им чисел встретились только 1, 2 и 5 (каждое хотя бы по одному разу). Найдите расстояние между деревнями.

Ответ: **10 км.**

Решение: Разобьём решение на три части.

1) Сумма написанных на каждой табличке чисел — это расстояние между деревнями. Так как есть табличка, на которой НОД написанных чисел равен 2, то каждое из чисел, а, значит, и расстояние, делится на 2. Аналогично, расстояние делится на 5. Значит, расстояние делится на 10.

2) Если бы расстояние было больше 10, то на каждом десятом столбе оба числа делились бы на 10, их НОД был бы не меньше 10, что противоречило бы условию.

3) При расстоянии 10 км на столбиках такие таблички: $(1, 9)$, $(2, 8)$, $(3, 7)$, $(4, 6)$, $(5, 5)$, и это удовлетворяет условию.

• **7.3.** На клетчатой бумаге нарисован квадрат. Известно, что его можно разрезать на прямоугольники размером 1×6 клеток. Докажите, что этот квадрат можно также разрезать на уголки из трёх клеток.

Решение: Так как квадрат можно разрезать на прямоугольники 1×6 клеток, то число его клеток делится на 6, и, значит, делится на 2 и на 3. Так как числа 2 и 3 — простые, то длина стороны квадрата кратна и 2, и 3. Следовательно, квадрат можно разрезать на прямоугольники 2×3. Каждый из них можно разрезать на уголки из 3 клеток.

• **7.4.** Наименьшее число огнетушителей, необходимых для нейтрализации огнедышащего 10-голового дракона, равно 4, а наименьшее число огнетушителей, необходимых для нейтрализации огнедышащего 16-голового дракона, равно 7. Какого наименьшего количества огнетушителей хватит для нейтрализации огнедышащего 19-голового дракона?

Ответ: **8.**

Решение: Первое решение состоит из двух частей. 1) 8 огнетушителей достаточно (так как для 10-голового дракона хватает 4 огнетушителей, то 8 достаточно даже для 20-голового). 2) 7 огнетушителей мало. Действительно, так как для 10 голов необходимо 4 огнетушителя, а для 16 голов — 7, то для $16 - 10 = 6$ голов 2 огнетушителей мало. Значит, на 3 головы 1 огнетушителя не хватит. По условию, на 16 голов 6 огнетушителей мало. Следовательно, для 19-голового дракона будет мало $6 + 1 = 7$ огнетушителей.

Второе решение. Пусть x — число огнетушителей, которые требуются для нейтрализации 1 головы (x может быть и не целым). Тогда из условия задачи получаем: $3 < 10x \leqslant 4$ и $6 < 16x \leqslant 7$. Отсюда $0{,}3 < x \leqslant 0{,}4$ и $\frac{3}{8} < x \leqslant \frac{7}{16}$. Значит, $\frac{3}{8} < x \leqslant 0{,}4$, т. е. $7\frac{1}{8} < 19x \leqslant 7{,}6$. Следовательно, 7 огнетушителей мало, а 8 хватит.

• **7.5.** На острове Невезения с населением 60 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Докажите, что на митинг недовольных придёт не более 50 человек.

Решение: Будем давать каждому человеку за недовольство одной реформой 1 конфетку. Тогда всего будет роздано $30 \times 5 = 150$ конфеток. Но, по условию, тот, кто выходит на митинг, недоволен хотя бы 3 реформами, т. е каждый пришедший на митинг получил не менее 3 конфеток. Значит, всего на митинги придут не более чем $150 : 3 = 50$ человек.

Условия и решения задач 8 класса

• **8.1.** Может ли при каких-нибудь натуральных a и b число $\dfrac{a^2 + 2\left(1 - 2b^2\right)}{a + 2b}$ оказаться целым?

Ответ: **не может.**

Решение: $\dfrac{a^2 + 2\left(1 - 2b^2\right)}{a + 2b} = \dfrac{a^2 - 4b^2 + 2}{a + 2b} = a - 2b + \dfrac{2}{a + 2b}$. Значит, для того чтобы данное выражение принимало целое значение, необходимо, чтобы было целым $\dfrac{2}{a + 2b}$, чего быть не может, т. к. значение знаменателя не менее 3, а потому положительное число $\dfrac{2}{a + 2b} \leqslant \dfrac{2}{3}$, т. е. не является целым числом.

• **8.2.** На каждом километре между деревнями Морковино и Капустино стоит километровый столб с табличкой, на одной стороне которой указано расстояние до Морковина, на другой — расстояние до Капустина. Гуляя по этой дороге, пёсик Фафик для каждой таблички подсчитал наибольший общий делитель записанных на ней чисел. Оказалось, что среди полученных им чисел встретились только 1, 3 и 5 (каждое хотя бы по одному разу). Найдите расстояние между деревнями.

Ответ: **15 км.**

Решение: Разобьём решение на три части.

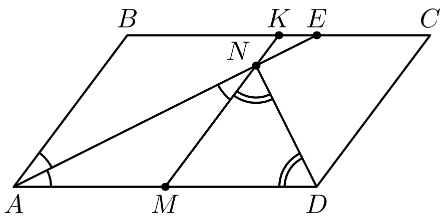
1) Сумма написанных на каждой табличке чисел — это расстояние между деревнями. Так как есть табличка, на которой НОД написанных чисел равен 3, то каждое из чисел, а, значит, и расстояние, делится на 3. Аналогично, расстояние делится на 5. Значит, расстояние делится на 15.

2) Если бы расстояние было больше 15, то на каждом пятнадцатом столбе оба числа делились бы на 15, их НОД был бы не меньше 15, что противоречило бы условию.

3) При расстоянии 15 км на столбиках такие таблички: $(1, 14)$, $(2, 13)$, $(3, 12)$, $(4, 11)$, $(5, 10)$, $(6, 9)$, $(7, 8)$, и это удовлетворяет условию.

• **8.3.** См. задачу 7.3.

• **8.4.** В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC отмечена середина K, а на стороне AD — середина M. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E, а отрезок MK — в точке N. Найдите величину угла AND.



Ответ: $90°$.

Решение: Так как AE — биссектриса угла A, то $\angle BAN = \angle NAM$. Так как $BC = AD$, $BK = KC$, $AM = MD$, то $BKMA$ — параллелограмм, AB и KM параллельны. Значит, $\angle BAN = \angle ANM$. Отсюда $\angle NAM = \angle ANM$. Значит, $\triangle ANM$ — равнобедренный, и $AM = MN$. Итак, в треугольнике AND имеют место равенства $AM = MN = MD$. По известной теореме, $\angle AND$ — прямой. (Доказательство теоремы. Пусть $\angle NAM = \angle ANM = x$. Так как $\triangle NMD$ — равнобедренный, то пусть $\angle MND = \angle NDM = y$. Тогда для треугольника AND сумма всех углов $x+x+y+y = 180°$, откуда $x + y = 90°$, т. е. $\angle AND = x + y = 90°$.)

• **8.5.** См. задачу 7.5.