Лужские группы Заочной математической школы
МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 3» г. Луги

VIII ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

5–8 классы

задачи и решения

г. Луга, 2013 г.

VIII Открытая олимпиада по математике Лужских групп Заочной математической школы и МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 3» г. Луги, 5–8 классы, 2013 г.

Результаты олимпиады будут опубликованы на странице `http://math.luga.ru/inf/compet/oolimp/8/`

На решение задач школьникам 5 классов отводилось 1,5 часа, 6 классов — 2 часа, 7–8 классов — 2,5 часа.

Контактный тел. (81372) 266-10, e-mail: `psp@luga.ru`.
Наш сайт в интернете: `http://math.luga.ru`

Оригинал-макет подготовлен в пакете LaTeX 2ε с использованием шрифтов Computer Modern с кириллическим расширением LH. Иллюстрации подготовлены в пакете `metapost`.

История олимпиады

Третий (региональный, или областной) этап Всероссийской олимпиады в Ленинградской области на протяжении многих лет проводится только для 9–11 классов. Почему только для них? Да потому, что областной оргкомитет не подтверждает делами свои речи и отчёты о работе с теми школьниками, которых в последнее время стали называть с пафосом — *одарёнными* (а это просто нормальные любознательные дети, которым интересна математика, которые хотят её изучать более глубоко, не довольствуясь лишь тем, что они получают в школе).

Во многих городах области и районная олимпиада проводится только для старших школьников (равнение на «область»). Но олимпиадную работу среди способных детей, очевидно, необходимо начинать не с 9 класса, а раньше — и это понятно любому профессиональному педагогу.

В Луге много лет тому назад письменные личные олимпиады для учеников 5–8 классов стали проводиться по инициативе неравнодушных педагогов. В их проведении и проверке работ школьников активное участие принимали студенты — в недавнем прошлом победители олимпиад. Полезность таких профессионально подготовленных и грамотно проведённых олимпиад (с разбором задач, показом работ и возможностью апелляции) очевидна: лужане стали занимать на областных олимпиадах не только все первые места во всех классах, но ещё и вторые — школьники привозили по 6–8 дипломов. Лужане были победителями областных олимпиад и в 9, и в 10, и в 11 классах — этому в немалой мере способствовала система олимпиад для школьников 4–8 классов.

Затем произошли печальные события, и уровень олимпиад снизился. Результаты не заставили себя ждать: показатели лужских школьников катастрофически упали (уже пять лет на областных математических олимпиадах никто из лужан не становится победителем).

Именно это подтолкнуло инициативную группу лужских педагогов-математиков к организации *настоящей* олимпиады для школьников 5–8 классов.

В 2006 году для учеников 5–8 классов не только Лужского района, но всей Ленинградской области была проведена Первая Открытая олимпиада по математике. Мероприятие прошло успешно. Судя по отзывам детей и учителей, приезжавших с ними, олимпиада понравилась. Возникло желание сделать мероприятие регулярным. И оно таким стало!

В 2012 году состоялась VII Открытая олимпиада. В состав её оргкомитета и жюри входили руководитель Лужских групп ЗМШ С. П. Павлов, учитель математики СОШ № 3 г. Луги Л. Н. Рысева и выпускник матмеха (математико-механического факультета) СПбГУ А. С. Рыжков.

Состав жюри VII Открытой олимпиады: аспирант матмеха В. И. Щипцов, выпускники матмеха В. А. Васильев, А. В. Гелеранский, И. А. Ларионов, А. С. Расторгуев, Д. В. Родионов, А. В. Тарасов, Д. Б. Хлонин, Е. В. Шавердова, студенты матмеха А. С. Каваленков, Д. В. Копин, И. В. Меженько, Е. В. Степанов, студенты ПМ-ПУ Ю. В. Воробьёв и Г. В. Яруш, выпускник СПбГЭТУ А. М. Чаусов, студент ВШЭ СПбГУ Г. В. Александров, студенты Политехнического университета М. А. Васильев, А. В. Пельменёв, студент СПбГЭТУ Г. В. Алдашкин, студент СПбГИнжЭкон В. Е. Шалагинов, студенты ЛИТМО А. Ю. Ермаков, А. А. Сергеева, студент СПбГУПС М. В. Курицын, старшеклассники И. Белехов, Д. Семёнов (школа № 3 г. Луги), И. Пайгашов (школа № 6 г. Луги).

Почти все названные выше члены жюри — бывшие или нынешние ученики Заочной математической школы (ЗМШ) и Летней математической школы (ЛМШ). Но они — не просто хорошие бывшие или нынешние ученики, а люди, понимающие, что внесение своего вклада в развитие математического образования школьников России — это не просто высокие слова. Это — важное дело. И, как всякое большое дело, совершается оно усилиями не одного человека, а стараниями многих людей. Приятно осознавать, что это понимают те, кто когда-то сами учились в Заочной и Летней математических школах. Спасибо им за понимание и помощь!

В VII Открытой олимпиаде (2012 г.) участвовали школьники Гатчинского района (школы № 2 и № 9 г. Гатчины, Сиверская гимназия), Лужского района (школы №№ 2, 3, 6, Заклинская школа), Великого Новгорода (гимназия № 2), Соснового Бора (школа № 2) — всего 90 человек.

На решение олимпиадных задач 5-классникам отводилось 1,5 часа, 6-классникам — 2 часа, ученикам 7–8 классов — 2,5 часа. Разумеется, в 7 и 8 классах хотелось бы предоставить больше времени, но жюри было необходимо успеть проверить работы, сообщить участникам о критериях проверки, провести показ работ (каждый участник получал свою работу, смотрел её и мог апеллировать — просить перепроверить решения тех или иных задач, поспорить с жюри), подвести итоги, наградить призёров, причём закончить всё это не поздно — так, чтобы иногородние успели на непоздню электричку.

Но овчинка стоит выделки: удаётся устроить для школьников праздник знаний, в котором могут участвовать не только те, кому разрешили это сделать, не только победители районного тура (как это сделано в жёсткой системе Всероссийской олимпиады), но любой желающий, которому интересна математика. И в этом главная ценность наших Открытых олимпиад.

Условия и решения задач 5 класса

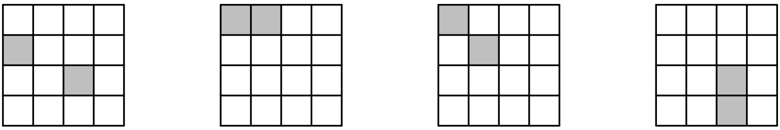
• **5.1.** Среди чисел 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 укажите все те, которые могут быть суммой цифр числа, делящегося на 7. (Каждый ответ подтвердите примером числа с нужной суммой цифр.)

Ответ: **3 (21), 4 (112), 5 (14), 6 (42), 7 (7), 8 (35), 9 (63).**

• **5.2.** У папы Карло есть 130 дощечек. Из 5 дощечек он может сделать игрушечную мельницу, из 7 дощечек — пароход, из 14 дощечек — самолёт. Самолёт он может продать за 19 золотых, пароход — за 8 золотых, мельницу — за 6 золотых. Сколько каких предметов надо сделать папе Карло, чтобы заработать как можно больше золотых? (Достаточно указать, сколько чего он сделает и сколько при этом заработает.)

Ответ: **1 пароход, 2 мельницы, 8 самолётов — всего заработает 172 золотых.**

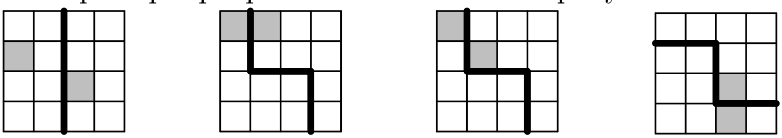
• **5.3.** Дан квадрат из 16 клеток. Наташа закрасила в нём две клетки четырьмя способами, как показано на рисунках. В любом ли из этих четырёх случаев Наташа сможет разрезать этот квадрат на две равные части так, чтобы закрашенные клетки были в разных частях?



1 2 3 4

Ответ: **в любом.**

Решение: Примеры разрезаний показаны на рисунках.



1 2 3 4

• **5.4.** У Антона есть пять батареек, из которых три заряжены, а две разряжены. Фотоаппарат Антона работает от двух заряженных батареек. За какое наименьшее число попыток Антону наверняка удастся включить свой фотоаппарат? (Следует указать число попыток, написать, как Антону действовать, и объяснить, почему после его действий фотоаппарат заработает.)

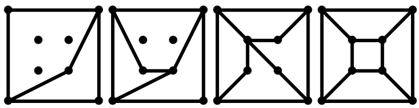
Ответ: **За 4.**

Решение: Решение. Вставим первую и вторую батарейки. Если фотоаппарат работает, то всё в порядке; если не работает, то либо одна из батареек разряжена, либо обе. Вставим третью и четвертую батарейки. Если фотоаппарат работает, то всё в порядке; если не работает, то одна из них точно разряжена, из первых двух разряжена только одна, а пятая батарейка точно работает. Теперь проверим пятую батарейку в паре с первой (третья попытка) и, если фотоаппарат не заработал, в паре со второй (четвёртая попытка). Таким образом, число попыток не более четырёх.

• **5.5.** В квадрате отмечены все его вершины и ещё 4 точки внутри квадрата. Некоторые пары точек соединили непересекающимися отрезками так, что квадрат разбился на несколько (более одной) частей, каждая из которых — четырёхугольник. Сколько четырёхугольников могло получиться? (Достаточно привести все ответы и каждый подтвердить рисунком.)

Ответ: **2, 3, 4 или 5.**

Решение: См. рисунки.



Условия и решения задач 6 класса

• **6.1.** Среди чисел 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 укажите все те, которые могут быть суммой цифр числа, делящегося на 7. (Каждый ответ подтвердите примером числа с нужной суммой цифр.)

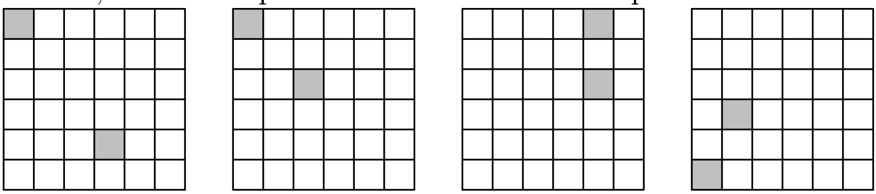
Ответ: **10 (28), 11 (56), 12 (84), 13 (49), 14 (77), 15 (168), 16 (196).**

• **6.2.** В школе 650 учеников и 325 парт. Ровно половина девочек сидят за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников так, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками?

Ответ: **нельзя.**

Решение: Так как ровно половина девочек сидит с мальчиками, то число девочек чётно. А поскольку оставшиеся девочки сидят за партами друг с другом, то их число тоже чётно. Значит, общее число девочек в школе делится на 4. Докажем ответ на задачу методом от противного. Пусть такая пересадка возможна. Тогда, рассуждая аналогично, придём к выводу, что общее число мальчиков в школе тоже делится на 4. Следовательно, делится на 4 число всех учеников школы. Но 650 не кратно 4. Противоречие.

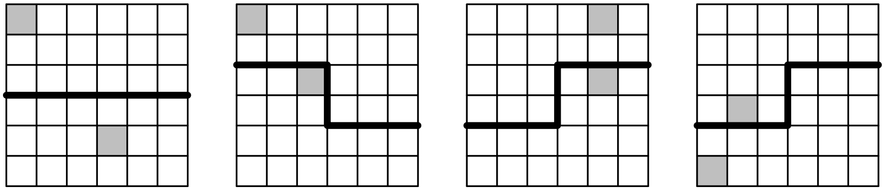
• **6.3.** Дан квадрат из 36 клеток. Таня закрасила в нём две клетки четырьмя способами, как показано на рисунках. В любом ли из этих четырёх случаев Таня сможет разрезать этот квадрат на две равные части так, чтобы закрашенные клетки были в разных частях?



1 2 3 4

Ответ: **в любом.**

Решение: Примеры разрезаний показаны на рисунках.



1 2 3 4

• **6.4.** У Серёжи есть пять батареек, из которых три заряжены, а две разряжены. Серёжин фотоаппарат работает от двух заряженных батареек. За какое наименьшее число попыток Серёже наверняка удастся включить свой фотоаппарат? (Следует указать число попыток, написать, как Серёже действовать, и объяснить, почему после его действий фотоаппарат заработает.)

Ответ: **за 4.**

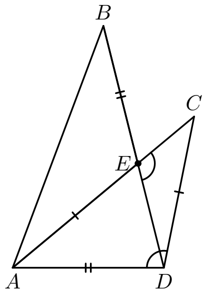
Решение: Вставим первую и вторую батарейки. Если фотоаппарат работает, то всё в порядке; если не работает, то либо одна из батареек разряжена, либо обе. Вставим третью и четвертую батарейки. Если фотоаппарат работает, то всё в порядке; если не работает, то одна из них точно разряжена, из первых двух разряжена только одна, а пятая батарейка точно работает. Теперь проверим пятую батарейку в паре с первой (третья попытка) и, если фотоаппарат не заработал, в паре со второй (четвёртая попытка). Таким образом, число попыток не более четырёх.

• **6.5.** См. задачу 5.5.

Условия и решения задач 7 класса

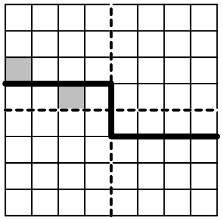
• **7.1.** Среди чисел 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32 укажите все те, которые могут быть суммой цифр числа, делящегося на 7. (Каждый ответ подтвердите примером числа с нужной суммой цифр.)
Ответ: **20 (497), 22 (3577), 24 (9177), 26 (14777), 28 (7777), 30 (63777), 32 (56777).**

• **7.2.** Даны точки A, B, C и D такие, что отрезки AC и BD пересекаются в точке E. Отрезок AE на 1 см короче, чем отрезок AB, $AE = DC$, $AD = BE$, $\angle ADC = \angle DEC$. Найдите длину отрезка EC.
Ответ: **1 см.**



Решение: Решение. $\angle BEA = \angle DEC = \angle ADC$, $AE = DC$, $BE = AD$, значит, $\triangle ADC = \triangle BEA$, откуда $AB = AC$. Следовательно, $EC = AC - AE = AB - AE = 1$.

• **7.3.** Дан квадрат из 64 клеток. Ангелина закрасила в нём какие-то две клетки. Всегда ли Лиза сможет разрезать этот квадрат на две равные части так, чтобы закрашенные клетки были в разных частях?
Ответ: **всегда.**



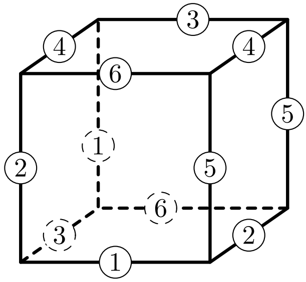
Решение: Разрежем квадрат 8×8 на четыре квадрата 4×4. Рассмотрим два случая.

1) Ангелина закрасила две клетки в разных четвертинках. Тогда Лиза сможет разрезать нужным образом квадрат 8×8 горизонтальным или вертикальным разрезом на два прямоугольника 4×8.

2) Ангелина закрасила две клетки в одной четвертинке 4×4. Эти клетки лежат либо в разных столбцах, либо в разных строках. Пусть для определённости закрашенные клетки лежат в разных строках (для столбцов рассуждение аналогично). Лиза режет четвертинку по горизонтали так, чтобы закрашенные клетки оказались в разных её частях. После этого продолжает разрез по границе четвертинок до центра квадрата 4×4 и отражает получившийся разрез относительно этого центра (см. рисунок).

• **7.4.** Каждый из трёх мальчиков — Денис, Паша и Серёжа — либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос: «Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Денис ответил: «Нет», Паша ответил: «Да». Что ответил Серёжа? (Не забудьте привести доказательство того, что Серёжа ответил именно так.)
Ответ: **«Нет».**
Решение: Так как Денис и Паша дали различные ответы, то один из них — лжец, а другой — правдивый. Кроме того, правдивый не мог ответить «Нет» на заданный ему вопрос, т. к. в этом случае он бы сказал неправду (среди двух оставшихся точно есть лжец). Следовательно, Денис — лжец. Он солгал, значит, среди Паши и Серёжи есть лжец. Понятно, что им может быть только Серёжа (иначе Паша не ответил бы «Да»). Значит, Серёжа солгал и ответил: «Нет».

• **7.5.** У куба 12 рёбер и 8 вершин. Изобретательная Олеся покрасила каждое ребро в какой-то цвет, после чего наблюдательная Яна заметила, что какие бы два цвета из использованных Олесей ни взять, в кубе можно найти два соседних ребра, покрашенных именно в эти цвета. Придумайте такую раскраску куба, постаравшись, чтобы разных цветов было как можно больше. (Соседними считаются рёбра, имеющие общую вершину. Цвета можете обозначать цифрами 1, 2, …). Если вы считаете, что большего числа цветов быть не может, докажите это.
Ответ: **6.**
Решение: В шесть цветов рёбра можно раскрасить, например, так, как показано на рисунке. Докажем, что в 7 или более цветов рёбра не раскрасить методом от противного. Допустим, это не так. Так как у куба 12 рёбер, то должен быть цвет (например, 1-ый), в который покрашено только одно ребро. Но для каждого ребра есть ровно четыре соседних с ним. Значит, с 1-м цветом в паре будет не более четырёх цветов, а потому всего цветов не более пяти. Противоречие.



Условия и решения задач 8 класса

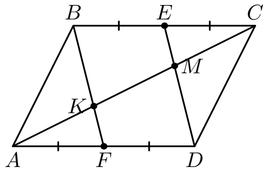
• **8.1.** Среди чисел 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 укажите все те, которые могут быть суммой цифр числа, делящегося на 7. (Каждый ответ подтвердите примером числа с нужной суммой цифр.)

Ответ: **19 (847), 21 (777), 23 (6377), 25 (5677), 27 (42777), 29 (35777), 31 (217777).**

• **8.2.** См. задачу 7.3.

• **8.3.** Середины E и F сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$ соединены с вершинами D и B соответственно. Обязательно ли прямые BF и ED делят диагональ AC на три равные части?

Ответ: **обязательно.**



Решение: Так как E и F — середины равных и параллельных сторон параллелограмма $ABCD$, то отрезки BE и FD равны и параллельны. Значит, $BEDF$ — параллелограмм, BF и ED параллельны. Рассмотрим $\angle BCA$: на стороне BC отложены равные отрезки BE и EC, и через точки B и E проведены параллельные прямые. По теореме Фалеса, $CM = MK$. Аналогично, $AK = MK$. Итак, $CM = MK = AK$.

• **8.4.** В школе колдовства 13 учеников. Перед экзаменом по ясновидению преподаватель посадил их за круглый стол и попросил угадать, кто получит диплом ясновидящего. Про себя и двух своих соседей все скромно умолчали, а про всех остальных каждый написал: «Никто из них не получит диплом!» Конечно же, все сдавшие экзамен угадали, а все остальные ученики ошиблись. Сколько колдунов получили диплом?

Ответ: **2.**

Решение: Понятно, что хотя бы один получил диплом (иначе приходим к противоречию) — пусть это Гарри. Значит, никто, кроме соседей Гарри, диплома не получил. Предположение о том, что оба его соседа получили дипломы, равно как и о том, что оба соседа не получили дипломы, приводит к противоречию. Легко убедиться, что ситуация получения дипломов только Гарри и одним из его соседей соответствует условию задачи.

• **8.5.** См. задачу 7.5.